FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik
D-52425 Jülich, Tel. (02461) 61-6402

Ausbildung von
Mathematisch-Technischen Assistenten/innen

Kurze Einführung in die formale Logik

Edgar M. E. Wermuth

FZJ-ZAM-BHB-0105

1. Auflage

(letzte Änderung: 15.01.92)

Wie, wo und wann findet man Beratung und Dispatch?

Beratung und Dispatch finden Sie im Erdgeschoß des Zentralinstituts für Angewandte Mathematik.

Öffnungszeiten:	Montag bis Freitag	8.15 - 17.00 Uhr
Telefonische Beratung:	Montag bis Freitag	8.15 - 18.45 Uhr

Publikationen des ZAM stehen im PostScript-Format auf dem WWW-Server des Forschungszentrums unter der URL: <http://www.fz-juelich.de/zam/docs/printable/> zur Verfügung. Eine Übersicht über alle Publikationen des ZAM erhalten Sie unter der URL: `<http://www.fz-juelich.de/zam/docs>`.

Wichtige Telefonnummern und Electronic-Mail-Adressen im ZAM

Die Electronic-Mail-Adressen der verschiedenen Beratungsdienste lauten:
***thema*.zam@fz-juelich.de**

Fachgebiet	Berater	Telefon	*thema*
Beratung und Betrieb	O. Büchner u.a.	**6400**	***beratung***
Dispatch	E. Bielitza, Ch. Dohmen, St. Meier	5642	*dispatch*
Bestellung von Dokumentation		5642	*literatur*
JuNet/Internet	R. Niederberger	4772	*junet*
PCs im JuNet	R. Grallert	6421	*junet-pc*
WiN und Mail	M. Sczimarowsky	6411	*win*
ISDN- und Modem-Zugang	W. Anrath M. Sczimarowsky	2053 6411	*isdn*
WWW	Dr. S. Höfler-Thierfeldt, M. Wegmann	6765	*www*
X-Terminals	O. Mextorf	2519	*x-terminals*
Backup, Archivierung	U. Schmidt	6577	*backup*
Supercomputer	Dr. N. Attig W. Frings	4416 2828	*sc*
Fortran	W. Erkens	4227	*fortran*
C und C++	G. Egerer	2339	*c*
Mathematik	Dr. B. Steffen	6431	*mathematik*
Statistik	Dr. W. Meyer	6414	*statistik*
Mathematische Software	I. Gutheil R. Zimmermann	3135 4136	*mathsoft*
Graphik	Ma. Busch, M. Boltes	4100	*graphik*
Videokonferenzen	M. Sczimarowsky S. Keimes	6411 8614	*vc*
Textverarbeitung, Druckerunterstützung	St. Graf, Her. Schumacher	6578	*text, drucker*
Zentrale Datenbank	W. Elmenhorst, B. v. Studnitz	6762	*oracle*

	Telefon
Telefax-Nr. des Dispatch und der Beratung	Fax 2810
Rufbereitschaft zentrale Rechnersysteme	6400
Rufbereitschaft Netzwerke	6440
Geräteservice: Workstations, PCs, X-Terminals,	6555
dezentrale Drucker und Plotter	2435
Druckausgabe bei BD-SG	2167

Die jeweils aktuelle Version dieser Tabellen finden Sie unter der URL:
`<http://www.fz-juelich.de/zam/zam-general/contacts.shtml>`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbemerkungen

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum,
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.
Mephistopheles (Goethe: Faust I)

Logic merely sanctions
the conquests of the intuition.
Jacques Salomon Hadamard

Bei Aussagen der Alltagssprache steht nicht immer fest, ob sie „wahr“ oder „falsch“ sind.

> Fritz ist eine Nervensäge.
> Frieda hat wieder nicht aufgepaßt.
> Helmut Kohl ist ein großer Kanzler.
> Laß mich in Ruhe.

Der semantische Wirklichkeitsbezug (und damit der „Wahrheitsgehalt“) solcher Aussagen ist ungeheuer komplex, nicht selten mehrdeutig, und außerdem ist gar nicht klar, ob man (wie Ludwig Wittgenstein (1889-1951) in seinem „Tractatus logico-philosophicus“) überhaupt sagen kann: „Der Satz ist das logische Bild der Tatsache.“

Es gibt aber viele Aussagesituationen, bei denen exakt zwischen zutreffenden (=wahren) und nicht zutreffenden (=falschen) Aussagen unterschieden werden kann, und bei *mathematischen* Aussagen ist diese Zweiteilung sozusagen als Grundregel eingebaut. Zumindest, wenn man den Aufbau der Mathematik in der heute zumeist üblichen Weise begründet; die intuitionistische bzw. konstruktive Mathematik (L.E.J.Brouwer, P.Lorenzen) berücksichtigt die mögliche Unentschiedenheit von Aussagen.

Die klassische formale Logik befaßt sich generell nur mit Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind (ein Drittes gibt es nicht, *tertium non datur*), mit, wie man auch sagt, *wahrheitsdefiniten* Aussagen. Insbesondere geht es dabei um die Analyse der Struktur von solchen Aussagen und Schlußfolgerungen, die *aufgrund ihrer Form* wahr bzw. korrekt sind, wie z.B. die Aussage:

> Wenn der Hahn kräht auf dem Mist,
> ändert sich das Wetter oder
> bleibt, wie's ist.

Diese Parodie einer meteorologischen Bauernregel hat die *logische* Form:

Wenn A, dann B oder nicht B.

Unabhängig vom Wahr- oder Falschsein (dem *Wahrheitswert*) der Teilaussagen A und B ist die Gesamtaussage immer wahr.

Kapitel 2

Aussagenlogische Junktoren und Wahrheitstafeln

In der Aussagenlogik betrachten wir stets *Aussageformen* (*Formeln*), die aus irgendwelchen formallogisch nicht weiter zerlegten Aussagebausteinen, durch Variablen A, B, C, ... repräsentiert, mithilfe logischer *Junktoren* zusammengesetzt sind:

sprachlicher Ausdruck	Formelzeichen	Name
nicht A	$\neg$A	Negation
A und B	A $\wedge$ B	Konjunktion
A oder B	A $\vee$ B	Disjunktion
wenn A, dann B	A $\Rightarrow$ B	Subjunktion, Implikation
A genau dann, wenn B	A $\Leftrightarrow$ B	Bijunktion, Äquivalenz, Koimplikation

Eine präzise formallogische Bedeutung erhalten die Junktoren, indem festgelegt wird, wie die Wahrheitswerte (das Wahr- oder Falschsein) der zusammengesetzten Aussageformen von denjenigen der Bausteine A und B abhängen. Diese Definitonen kann man übersichtlich durch „*Wahrheitstafeln*" darstellen, wobei „W" für „wahr" und „F" für „falsch" steht. (Der Gebrauch von Wahrheitstafeln geht auf Charles S. Peirce (1839 - 1914) und Wittgensteins schon erwähnten „Tractatus" zurück.)

Definition 1 *Aussagenlogische Junktoren*

A	$\neg A$
W	*F*
F	*W*

A	***B***	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	***W***	*W*	*W*	*W*	*W*
W	***F***	*F*	*W*	*F*	*F*
F	***W***	*F*	*W*	*W*	*F*
F	***F***	*F*	*F*	*W*	*W*

Von diesen Festlegungen ist höchstens diejenige von A $\Rightarrow$ B nicht selbstverständlich. Plausibel wird sie aber durch mathematische Beispiele wie:

$$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

Diese Implikation möchte man als für beliebige reelle Zahlen a und b wahre mathematische Aussage ansehen; und im Falle des Nichtzutreffens von $0 < a < b$ kann eben $a^2 < b^2$ entweder wahr oder falsch sein („für diesen Fall wird nichts behauptet").

Mithilfe der eingeführten Junktoren kann man nun kompliziertere Aussageformen zusammensetzen wie

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{A} \vee (\neg \mathrm{B})),$$

$(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow ((\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow (\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B}))$,

$((\neg\mathrm{A}) \vee \mathrm{B}) \Rightarrow ((\neg\mathrm{B}) \wedge \mathrm{A})$,

usw.

Um Klammern zu sparen, vereinbart man dabei, daß „$\neg$“ stärker als die anderen Junktoren bindet, und „$\wedge$“ sowie „$\vee$“ stärker als „$\Rightarrow$“ und „ $\Leftrightarrow$“. Dadurch vereinfacht sich z.B. die letzterwähnte Formel zu

$\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$.

Mit der *Wahrheitstafelmethode* kann man für jede so gebildete Aussageform alle möglichen Wahrheitswertbelegungen durchmustern.

Dazu einige **Beispiele**:

a)

A	**B**	$\neg$A	$\vee$	B	$\Rightarrow$	$\neg$B	$\wedge$	A
W	**W**	F	W		F	F	F	
W	**F**	F	F		W	W	W	
F	**W**	W	W		F	F	F	
F	**F**	W	W		F	W	F	

b)

A	**B**	A	$\Rightarrow$	A	$\vee$	$\neg$B
W	**W**		W		W	F
W	**F**		W		W	W
F	**W**		W		F	F
F	**F**		W		W	W

Unter jedem Junktor steht der Wahrheitswert, der bei der links gegebenen Variablenbelegung für die mit diesem Junktor gebildete Teilformel resultiert; der am schwächsten bindende („äußerste“) Junktor ergibt dann den jeweiligen Wahrheitswert der ganzen Formel, welch letzterer dann durch Einrahmung hervorgehoben ist. ▫

Bei a) sieht man, daß $\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$ genau dann wahr ist, wenn A wahr und B falsch ist. Die Formel $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}$ hingegen ist immer wahr, unabhängig von den Wahrheitswerten, mit denen A und B belegt sind. Jede solche durch ihre junktorenlogische Zusammensetzung wahre Aussageform nennt man *Tautologie* oder *allgemeingültig*; ebenso heißen *Aussagen* von tautologischer Form Tautologien (z.B. „Wenn der Hahn kräht…“).

Einige Beispiele für Tautologien:

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{2.1}$$

$$(\neg\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})) \tag{2.3}$$

$$\mathrm{A} \Leftrightarrow \neg\neg\mathrm{A} \tag{2.4}$$

Mit der Wahrheitstafelmethode haben wir ein einfaches *schematisches Verfahren*, bei jeder aussagenlogischen Formel nach *endlich vielen Schritten* zu entscheiden, ob sie allgemeingültig ist.

Das Gegenstück zu den Tautologien sind die *Kontradiktionen*, die Aussageformen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen auftretenden Aussagevariablen stets falsch sind, z.B.

$\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A}$

oder

$(\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B})$.

Jede Kontradiktion enthält mindestens eine Negation.

Kapitel 3

Äquivalenzumformungen

Sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ Aussageformen und ist $\mathbf{F}_1 \Leftrightarrow \mathbf{F}_2$ eine Tautologie, so nennt man $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ *äquivalent*; bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ vorkommenden Variablen sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ entweder beide „wahr“ oder beide „falsch“. Man schreibt in diesem Fall auch:

$$\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$$

Zwei verschiedene zueinander äquivalente Aussageformen formulieren sozusagen mit unterschiedlichen Worten dieselbe logische Verknüpfung der in ihnen auftretenden (durch die Variablen repräsentierten) Aussagebausteine.
Beispiele für solche Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \vee \mathrm{B} &\sim \neg(\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) && (3.1)\\
\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} &\sim \neg(\neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}) && (3.2)\\
\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B} &\sim (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) && (3.3)\\
\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} &\sim \mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A} && (3.4)\\
\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) &\sim (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}) && (3.5)\\
\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) &\sim (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) && (3.6)\\
\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) &\sim \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} && (3.7)\\
\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) &\sim \neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B} && (3.8)\\
\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) &\sim (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C} && (3.9)\\
\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) &\sim (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} && (3.10)\\
(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}) &\sim \mathrm{A} && (3.11)\\
(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) &\sim \mathrm{A} && (3.12)
\end{aligned}$$

Die Äquivalenzen (3.5) und (3.6) heißen *Distributivgesetze*, (3.7) und (3.8) *de Morgansche Regeln*, (3.9) und (3.10) *Assoziativgesetze* der Aussagenlogik.
Die Assoziativgesetze zeigen (Mehrfachanwendung!), daß man bei mehrgliedrigen Disjunktionen oder Konjunktionen keine Klammern zu setzen braucht, da alle Klammersetzungen zu untereinander äquivalenten Formeln führen.

Die hier aufgeführten und ähnliche Äquivalenzen ergeben zusammen mit den folgenden beiden Sätzen die Möglichkeit, von einer Formel durch *Äquivalenzumformung* zu einer Vielzahl logisch gleichwertiger Formeln zu gelangen.

Satz 1

Jede Aussageform wird in eine zu ihr äquivalente verwandelt, wenn eine Teilformel durch eine äquivalente andere Formel ersetzt wird.

Beispielsweise ist Formel (2.3) äquivalent zu

$$(A \Rightarrow (C \vee \neg B)) \Rightarrow ((B \vee \neg A) \Rightarrow (C \vee \neg A)) \tag{3.13}$$

(hier wurde dreimal die Äquivalenz (3.4) benutzt),
und $A \wedge (B \vee C)$ ist äquivalent zu $A \wedge \neg(\neg B \wedge \neg C)$.

Zum **Beweis** von Satz 1 bemerken wir nur, daß bei jeder Belegung der vorkommenden Variablen mit Wahrheitswerten der resultierende Wahrheitswert der ersetzten Teilformel nach Voraussetzung derselbe ist wie vor der Ersetzung, also auch der Wahrheitswert der Gesamtformel unverändert bleibt. ■

Durch ähnliche Überlegungen gelangt man zu

Satz 2

Wird in zwei äquivalenten Aussageformen eine Variable an jeder Stelle ihres Auftretens durch eine bestimmte Formel ersetzt, ergeben sich wieder zwei äquivalente Aussageformen.

Beispiel: Wegen

$$A \Rightarrow B \sim B \vee \neg A$$

gilt auch

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (C \vee \neg B) &\sim (C \vee \neg B) \vee \neg A, \\ (B \vee \neg A) \Rightarrow (C \vee \neg A) &\sim (C \vee \neg A) \vee \neg(B \vee \neg A), \end{aligned}$$

so daß (3.14) und damit auch (2.3) äquivalent ist zu

$$((C \vee \neg A) \vee \neg(B \vee \neg A)) \vee \neg((C \vee \neg B) \vee \neg A). \tag{3.14}$$

Zur Veranschaulichung ersetzen wir die Variablen bei (2.3) und (3.14) durch Aussagen, und zwar

A Der See ist zugefroren.
B Dem Esel geht's zu gut.
C Der Esel läuft auf's Eis.

Die aus (2.3) entstehende Aussage lautet dann:

> Falls der Esel, sofern der See zugefroren ist, auf's Eis läuft, wenn es ihm zu gut geht, so läuft der Esel bei zugefrorenem See auf's Eis, wenn es ihm bei zugefrorenem See zu gut geht. (2.3')

Aus (3.14) ergibt sich entsprechend:

> Der See ist nicht zugefroren, oder der Esel läuft nicht auf's Eis, oder es stimmt nicht, daß der See nicht zugefroren ist oder es dem Esel zu gut geht, oder es stimmt nicht, daß der See nicht zugefroren ist oder es dem Esel nicht zu gut geht oder der Esel auf's Eis läuft. (3.14')

Während man bei (2.3') unmittelbar erkennt, daß es sich um eine Tautologie handelt, die also, wenn man sie behauptet, nichts über den Wahrheitsgehalt der in ihr auftretenden Aussagebausteine beinhaltet und daher keinen Beitrag zur Eselskunde liefert, merkt man dies bei der logisch völlig äquivalenten Aussage (3.14') nicht so ohne weiteres. Deshalb ist es (auch bei Tautologien) nützlich, verschiedene äquivalente Varianten zu kennen, um besser echte von unechten Aussagen der Eselskunde zu unterscheiden. □

Bei dem soeben betrachteten Beispiel wurde die nur mit dem Junktor „$\Rightarrow$“ gebildete Formel (2.3) umgewandelt in eine äquivalente Formel, die ausschließlich die Junktoren „$\neg$ “ und „$\vee$“ verwendet. Dies führt auf die generelle Frage, inwieweit man beim Aussagenkalkül auf gewisse Junktoren verzichten könnte.

Satz 3

a) *Zu jeder aussagenlogischen Formel $\boldsymbol{F}$ gibt es äquivalente Formeln $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$, die nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“, nur „$\neg$“ und „$\vee$“ bzw. nur „$\neg$“ und „$\Rightarrow$“ enthalten.*

b) *$A \wedge B$ läßt sich nicht allein mithilfe der Junktoren „$\neg$“ und „$\Rightarrow$“ darstellen.*

Beweis: Die Formeln (3.1) bis (3.4) in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2 zeigen, daß alle Formeln in äquivalente Formeln umgewandelt werden können, in denen nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ bzw. „$\neg$“ und „$\vee$“ vorkommen. Wegen

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} : \tag{3.15}$$

kann man das Auftreten von „$\vee$“ durch das von „$\neg$“ und „$\Rightarrow$“ ersetzen. Damit ist a) bewiesen.

Zum Nachweis von b) sei verwiesen auf Hilbert/Ackermann [2], Seite 14. ■

Es gibt überraschenderweise auch zwei aussagenlogische Junktoren, die jeweils *allein* ausreichen, alle anderen auszudrücken, und zwar die folgenden:

Definition 2 *Sheffer-Strich und Peirce-Verknüpfung*

A	***B***	*A* | *B*	*A* ∘ *B*
W	***W***	*F*	*F*
W	***F***	*W*	*F*
F	***W***	*W*	*F*
F	***F***	*W*	*W*

A | *B* heißt *Sheffer-Strich*-Verknüpfung, A ∘ *B* heißt *Peirce*-Verknüpfung.
Es gilt

$$\mathrm{A} \mid \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B} \tag{3.16}$$

und

$$\mathrm{A} \circ \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}, \tag{3.17}$$

weshalb die Sheffersche auch NAND-Verknüpfung („NOT AND“, man vgl. (12)) und die Peircesche NOR-Verknüpfung („NOT OR“) heißt.
Aus

$$\mathrm{A} \mid \mathrm{A} \sim \neg\mathrm{A}, \qquad (\mathrm{A} \mid \mathrm{A}) \mid (\mathrm{B} \mid \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$$

sowie

$$\mathrm{A} \circ \mathrm{A} \sim \neg\mathrm{A}, \qquad (\mathrm{A} \circ \mathrm{A}) \circ (\mathrm{B} \circ \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$$

folgt nach Satz 3 unmittelbar, daß alle anderen Verknüpfungen allein durch NAND oder allein durch NOR ausgedrückt werden können.
Aus Gründen der Lesbarkeit ist es aber dennoch sinnvoll, eine gewisse an die Alltagssprache angelehnte Redundanz der aussagenlogischen Formelsprache beizubehalten und alle fünf ursprünglich eingeführten Junktoren parallel zu verwenden (siehe auch das Esels-Beispiel).

Kapitel 4

Disjunktive und konjunktive Normalformen

Es gibt allerdings recht übersichtliche Darstellungen der aussagenlogischen Formeln, die ausschließlich die Junktoren „¬“, „∧“ und „∨“ verwenden. Zu ihnen gelangt man, wenn man sich fragt, ob eigentlich mit den bisher eingeführten Junktoren zu jeder kombinatorisch möglichen Wahrheitstafel eine dieser entsprechende aussagenlogische Formel konstruiert werden kann.
Sei beispielsweise folgende Wahrheitstafel gegeben:

A	**B**	**C**	**F**
W	**W**	**W**	W
W	**W**	**F**	F
W	**F**	**W**	W
W	**F**	**F**	F
F	**W**	**W**	W
F	**W**	**F**	F
F	**F**	**W**	W
F	**F**	**F**	F

Die Frage ist, ob es tatsächlich eine Formel **F** mit den Variablen A,B,C gibt, zu der diese Tafel paßt.
Nun, die Formel soll genau dann mit dem Wahrheitswert „wahr“ belegt werden, wenn

A und B und C wahr

oder

A und ¬ B und C wahr

oder

¬ A und B und C wahr

oder

¬ A und ¬ B und C wahr.

Dies ist offenbar der Werteverlauf der Formel

$$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}), \tag{4.1}$$

womit eine geeignete Formel **F** gefunden ist.
Man nennt eine Formel solcher Bauart (eine mehrgliedrige Disjunktion, bei der jedes Disjunktionsglied eine Konjunktion von Variablen und negierten Variablen ist) eine *disjunktive Normalform.*
Vom vorgeführten Beispiel her ist klar, wie man bei jeder beliebigen gegebenen Werteverteilung (Wahrheitstafel) – unabhängig von der Anzahl der Variablen – zu einer passenden disjunktiven Normalform gelangt.

Allerdings gibt es evtl. auch äquivalente einfachere disjunktive Normalformen, bei denen nicht in jedem Disjunktionsglied alle Variablen vorkommen; (22) z.B. ist nach (16) äquivalent zu $(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge C)$ und damit sogar zu C allein!

Statt als Disjunktion von Konjunktionen kann man jede aussagenlogische Formel **F** auch als Konjunktion von Disjunktionen darstellen, d.h. in *konjunktiver Normalform*. Man erhält sie z.B., indem man von einer disjunktiven Normalform von $\neg$ **F** ausgeht, nach den de Morganschen Regeln (3.7) und (3.8) $\neg\neg$ **F** bildet und $\neg\neg$ **F** $\sim$ **F** berücksichtigt.
Man kann auch durch Äquivalenzumformungen eine gegebene Formel in disjunktive oder konjunktive Normalform bringen.

Beispiel:
Es soll $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ in konjunktive Normalform gebracht werden.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\ \sim\ & (\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C) \\ \sim\ & \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) \\ \sim\ & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C) \\ \sim\ & (A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee (\neg A \vee C)). \end{aligned}$$

Hier hat man schon eine konjunktive Normalform, wenn man die innersten Klammern noch wegläßt. Eine disjunktive Normalform stellt die vorletzte Formel dar, wenn man noch die Klammern um $\neg A \vee C$ wegläßt. □

Kapitel 5

Semantischer Folgerungsbegriff und Ableitungskalkül

In den letzten Abschnitten wurden einige Techniken vorgeführt, durch Äquivalenzumformungen eine Aussageform in logisch *gleichwertige* umzuwandeln. Nun befassen wir uns mit der allgemeineren Frage, wann eine Aussageform aus einer oder mehreren anderen *logisch folgt*.
Die Intention des logischen Schließens ist es, von einer oder mehreren vorausgesetzten Aussagen (*Prämissen*) zu einer solchen Folgerung (*Konklusion*) überzugehen, die auf jeden Fall dann wahr ist, wenn sämtliche Prämissen es sind.

Definition 3 *Semantischer Folgerungsbegriff*

Eine aussagenlogische Formel $\boldsymbol{F}$ folgt aus den Formeln $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ (in Zeichen: $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n \models \boldsymbol{F}$) genau dann, wenn $\boldsymbol{F}$ wahr ist bei jeder Wahrheitswertbelegung der in $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ vorkommenden Aussagevariablen, für welche $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ wahr sind.

Aufgrund der Definition des Junktors "$\Rightarrow$" ergibt sich sofort

Satz 4
$\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n \models \boldsymbol{F}$ *gilt genau dann, wenn* $\boldsymbol{F}_1 \wedge \ldots \boldsymbol{F}_n \Rightarrow \boldsymbol{F}$ *eine Tautologie ist.*

Damit ist die Überprüfung eines aussagenlogischen Schlusses auf Korrektheit einfach darauf zurückgeführt, die Allgemeingültigkeit der korrespondierenden Implikation nachzuweisen, z.B. mit der Wahrheitstafelmethode.
Kennt man alle Tautologien, kennt man also auch alle korrekten Schlüsse. (Infolgedessen kann man sagen: Die formale Logik ist *die Lehre von den der Form nach wahren Aussagen.*)
Wir haben bisher die Allgemeingültigkeit von Formeln mittels Durchmusterung aller Möglichkeiten (Wahrheitstafeln) erschlossen. Dies ist eine *semantische* Methode. Andererseits gelangt man, von allgemeingültigen Formeln ausgehend, durch Äquivalenzumformung zu neuen allgemeingültigen Formeln. Es läßt sich nun sogar beweisen, daß man mit einigen einfachen Tautologien als *Axiomen* und einer einzigen *Ableitungsregel* alle anderen aussagenlogischen Tautologien erschließen kann.
Die Ableitungsregel ist der *Modus ponens* (Bezeichnung aus der traditionellen Syllogistik):

Sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ Formeln, und $\mathbf{F}_1$ sowie $\mathbf{F}_1 \Rightarrow \mathbf{F}_2$ Tautologien, so ist auch $\mathbf{F}_2$ eine Tautologie. (MP)
(„Aus $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_1 \Rightarrow \mathbf{F}_2$ folgere $\mathbf{F}_2$.“)

Daß diese Regel korrekt ist, ist klar, da offenbar $(\mathbf{F} \wedge (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})) \Rightarrow \mathbf{G}$ für beliebige Formeln **F, G** eine Tautologie ist.
Als Axiome kann man wählen alle Formeln der folgenden Formen:

$$\mathbf{F} \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}) \tag{A1}$$

$$(\neg\mathbf{F} \Rightarrow \neg\mathbf{G}) \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}) \tag{A2}$$

$$(\mathbf{F} \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{H})) \Rightarrow ((\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}) \Rightarrow (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{H})) \tag{A3}$$

(Man vgl. Formeln (2.1) bis (2.3).)

(MP), (A1), (A2), (A2) ergeben zusammen einen *Ableitungskalkül*, mit dem sich alle Tautologien ableiten lassen (den Beweis dafür führen wir hier nicht, da etwas langwierig).
Für den Bereich der Aussagenlogik ist es allerdings weit einfacher, die Allgemeingültigkeit einer Formel über Wahrheitstafeln zu beweisen, statt zu versuchen, sie schrittweise herzuleiten durch „geschickt gewählte“ Einsetzung in den Axiomen (A1), (A2), (A2) sowie ebensolche Anwendungen von (MP). In der Quantorenlogik werden wir allerdings auf eine grundlegend andere Situation treffen.

Kapitel 6

Schaltfunktionen

Beim Aufstellen der Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel ist es irrelevant, was die dabei auftretenden Buchstaben W und F inhaltlich bedeuten. Man kann völlig absehen vom Bezug zu „wahr" und „falsch", W und F durch irgendwelche anderen Zeichen, etwa 0 und 1, ersetzen, und eine Formel mit den Variablen $A_1, \ldots, A_n$ auffassen als *Funktion*, die jedem n-Tupel von Einsen und Nullen wieder 1 oder 0 zuordnet. Die zugehörige Wahrheitstafel ist dann nichts als die tabellarische Darstellung der Funktion. Zwei äquivalenten Formeln, in denen dieselben Variablen auftreten, wird auf diese Weise einunddieselbe Funktion zugeordnet, während verschiedenen Funktionen offenbar stets nicht-äquivalente Formeln entsprechen.

Bei n Variablen gibt es 2^n n-Tupel von Nullen und Einsen (für jeden der n Plätze hat man unabhängig voneinander jeweils zwei Möglichkeiten), also $2^{(2^n)}$ verschiedene solcher Funktionen. Diese Anzahl wächst mit n ungeheuer schnell:

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{(2^n)}$	4	16	256	65536	4294967296	$1,8446744 * 10^{19}$	$3,4028 * 10^{38}$

Es gibt also rund 4,3 Milliarden(!) verschiedene (logisch zueinander nicht äquivalente) Möglichkeiten, die fünf Sätze

A Heute ist es kalt.
B Morgen scheint die Sonne.
C Die Wetterkunde ist ein Teilgebiet der Astrologie.
D Im FZJ gibt es Meteorologen.
E Das FZJ ist ein Forschungszentrum.

aussagenlogisch zu verknüpfen, z.B.

Wenn es heute kalt ist und morgen die Sonne nicht scheint, ist die Wetterkunde ein Teilgebiet der Astrologie, woraus folgt, daß das FZJ, weil es dort Meteorologen gibt, kein Forschungszentrum ist.

oder Da es am Forschungszentrum FZJ Meteorologen gibt, ist die Wetterkunde kein Teilgebiet der Astrologie; deshalb ist es heute nicht kalt und scheint morgen die Sonne.

Selbst wenn man Formeln wie

$$(A \Rightarrow B) \vee ((C \wedge \neg D) \Rightarrow \neg E)$$

und

$$(B \Rightarrow C) \vee ((D \wedge \neg E) \Rightarrow \neg A)$$

als von gleicher Bauart identifiziert, gibt es immer noch weit mehr als 35 Millionen wirklich verschiedenartiger Verknüpfungen von fünf Aussagebausteinen A, B, C, D, E. Der nahezu unermeßlichen Fülle von 0-1-Funktionen entsprechen nun nur wenige Grundfunktionen, durch die alle Funktionen mittels Ineinandereinsetzen darstellbar sind, nämlich die den Junktoren korrespondierenden ein- und zweistelligen Funktionen. Man kann diese auch rein rechnerisch darstellen:
Wenn x und y jeweils für eine der Zahlen 0 und 1 stehen, gilt

Definition 4

$$\begin{aligned}
NON(x) &= 1-x \\
AND(x,y) &= xy \\
OR(x,y) &= x+y-xy \\
IMPL(x,y) &= 1-x+xy \\
EQU(x,y) &= 1-(x-y)^2 \\
NAND(x,y) &= 1-xy \\
NOR(x,y) &= (1-x)(1-y)
\end{aligned}$$

Für zusammengesetzte Funktionen erhält man durch Ineinandersetzen dieser Rechenausdrücke die entsprechenden Funktionsterme, wobei sich mit $x^2 = x$ und $y^2 = y$ (da x und y gleich 1 oder 0 sind) Vereinfachungen ergeben.

Beispiel:

$$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$$

enspricht (mit A$\hat{=}x$, B$\hat{=}y$, C$\hat{=}z$)

$$\begin{aligned}
& \mathrm{EQU}(x \cdot \mathrm{OR}(y,z), \mathrm{OR}(xy,xz)) \\
= \; & \mathrm{EQU}(x \cdot (y+z-yz), xy+xz-x^2yz) \\
= \; & \mathrm{EQU}(xy+xz-xyz, xy+xz-xyz) \\
= \; & 1,
\end{aligned}$$

Die Beispielfunktion ergibt also stets den Wert 1; die zugrundeliegende Formel ist ja eine Tautologie (eines der Distributivgesetze). □

In dieser Weise kann man jede Tautologie mechanisch „ausrechnen“. Der Vorzug eines solchen algebraischen Verfahrens gegenüber der Wahrheitstafelmethode: Der Aufwand wächst bei weitem nicht so schnell mit der Anzahl der Aussagevariablen!

Man kann die aussagenlogischen Funktionen durch elektrische Schaltwerke mit mehreren Eingängen und einem Ausgang realisieren:

Der Belegung eines Eingangs mit 1 oder 0 entspricht elektrisch: Es kommt während eines bestimmten Zeittaktes ein bzw. kein Impuls über diesen Eingang an; Analoges gilt für den Ausgang.
Aus solchen Schaltungen sind Digitalrechner tatsächlich aufgebaut, weshalb aussagenlogische Äquivalenzumformungen ermöglichen, zu einer gegebenen Schaltung eine andere äquivalente, möglicherweise aber einfachere zu finden.
Man hat daher für die Zwecke des *Schaltungsdesigns* systematische Umformungstechniken auf der Basis von disjunktiven und konjunktiven Normalformen entwickelt; siehe z.B. Giloi/Liebig [3] und Schöne [5].

Als Anwendung der Schaltfunktionen überlegen wir uns die Konstruktion eines sogenannten *Volladdierers*:

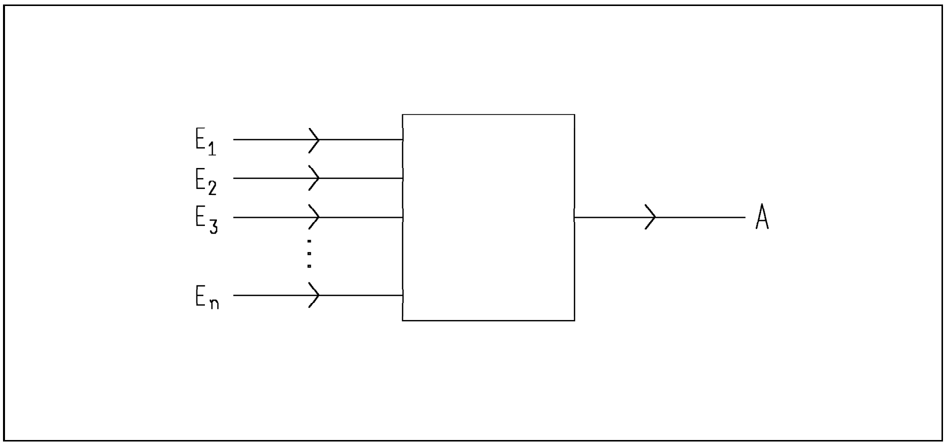

Abbildung 6.1: Schaltwerk

Wir bestimmen zunächst die Schaltfunktionen f_1 und f_2, die zwei Dualziffern addieren und die den Übertrag berechnen. Aus ihnen kann ein *Addierwerk* für Dualzahlen aufgebaut werden.

x	y	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Offenbar gilt für die Übertragsfunktion

$$f_2(x,y) = xy = \mathrm{AND}(x,y)$$

während

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x + y (\mathrm{mod} 2) \\ &= (x-y)^2 \\ &= 1 - (1 - (x-y)^2) \\ &= \mathrm{NON}(\mathrm{EQU}(x,y)) \\ &= : \mathrm{XOR}(x,y). \end{aligned}$$

(Hat man die *Wertetafel* für eine Schaltfunktion $f(x,y,z)$ vorgegeben, so kann man den *algebraischen Ausdruck* für $f(x,y,z)$ folgendermaßen bestimmen:
Da der algebraische Term aus den Grundfunktionen zusammengesetzt ist, gilt stets

$$f(x,y,z) = a + bx + cy + dz + exy + fxz + gyz + hxyz$$

Dabei ist $a = f(0,0,0)$, $b = f(1,0,0,) - a$, $c = f(0,1,0) - a$, $d = f(0,0,1) - a$. Die Koeffizienten e, f und g bestimmen sich aus $f(1,1,0)$, $f(1,0,1)$ bzw. $f(0,1,1)$, h aus $f(1,1,1)$.
Analog kann man immer vorgehen, unabhängig von der Anzahl der zu berücksichtigen Variablen.)

Wir überlegen uns nun den Aufbau eines Addierwerks, das zwei Dualzahlen der Länge n addiert.
Zunächst der Fall n=1:

Durch dieses Schaltwerk werden die beiden einstelligen Dualzahlen x_1 und y_1 zu der zweistelligen Dualzahl $z_2 z_1$ addiert (wobei die führende Ziffer z_2 natürlich 0 sein kann).
Angenommen nun, es sei schon ein Addierwerk für zwei n-stellige Dualzahlen konstruiert worden;

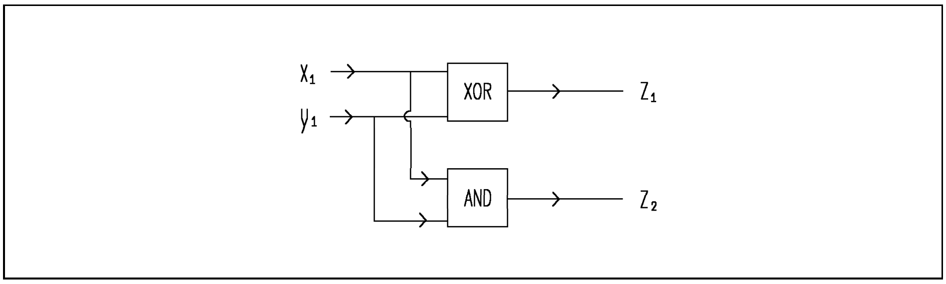

Abbildung 6.2: Addierwerk für zwei Dualzahlen

darauf aufbauend soll eines für (n+1)-stellige Zahlen entworfen werden. Ist dieser konstruktive Erweiterungsschritt allgemein geklärt, kann man offenbar sukzessiv für jedes natürliche n ein n-stelliges Addierwerk konstruieren.
(Diese *rekursive Konstruktionsbeschreibung* für Addierwerke entspricht der rekursiven Definition und dem Beweis durch vollständige Induktion, von denen in der Mathematik oft Gebrauch gemacht wird.)

Das schon konstruierte Addierwerk sei folgendermaßen bezeichnet:

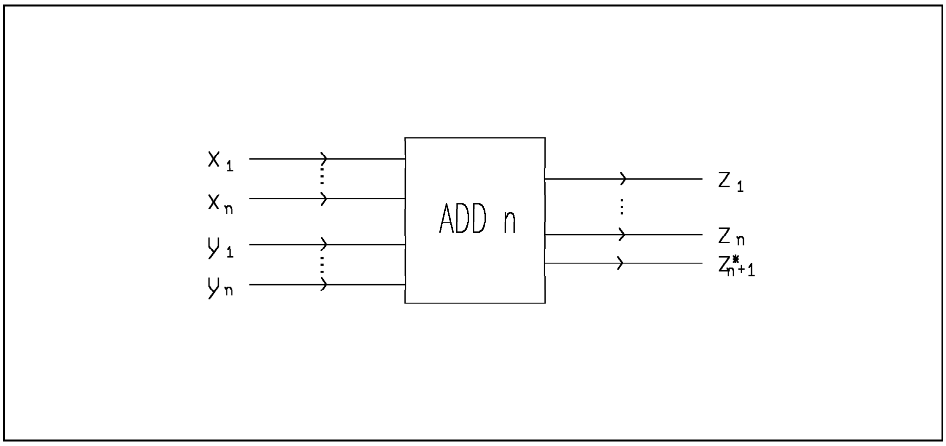

Abbildung 6.3: Addierwerk für mehrere Dualzahlen

Wollen wir nun zwei zusätzliche führende Stellen x_{n+1} und y_{n+1} in die Addition einbeziehen, ergibt sich die endgültige Stelle z_{n+1} aus x_{n+1}, y_{n+1} und der (n+1)-ten Resultatstelle z^*_{n+1} gemäß

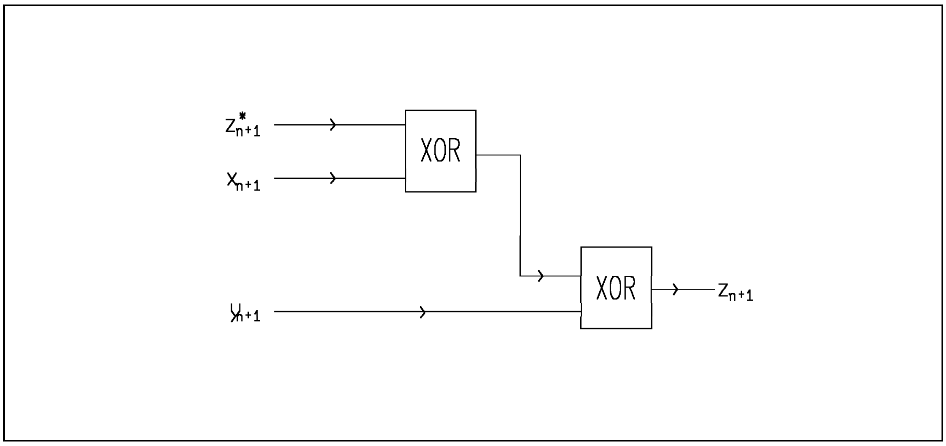

Abbildung 6.4: Schaltwerk für $(n+1)$-te Stelle

Der Wert der neuen führenden Resultatstelle z_{n+2} ist genau dann 1, wenn mindestens zwei der drei Werte z^*_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1} gleich 1 sind. Wir suchen also eine möglichst einfache Schaltung für

z	x	y	$f(z,x,y)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(z,x,y) &= xy + xz + yz - 2xyz \\ &= y(x + z - 2xz) + xz \\ &= y(x + z - 2xz) + xz - 2y(x + z - 2xz)xz \\ &= \mathrm{XOR}(\mathrm{AND}(y, \mathrm{XOR}(x,z)), \mathrm{AND}(x,z)). \end{aligned}$$

(Bei dieser Umformung wurde die wegen $x, y, z \in \{0, 1\}$ gültige Identität $y(x + z - 2xz)xz = 0$ benutzt.)

Damit kann man das Addierwerk für (n+1)-stellige Zahlen folgendermaßen gestalten:

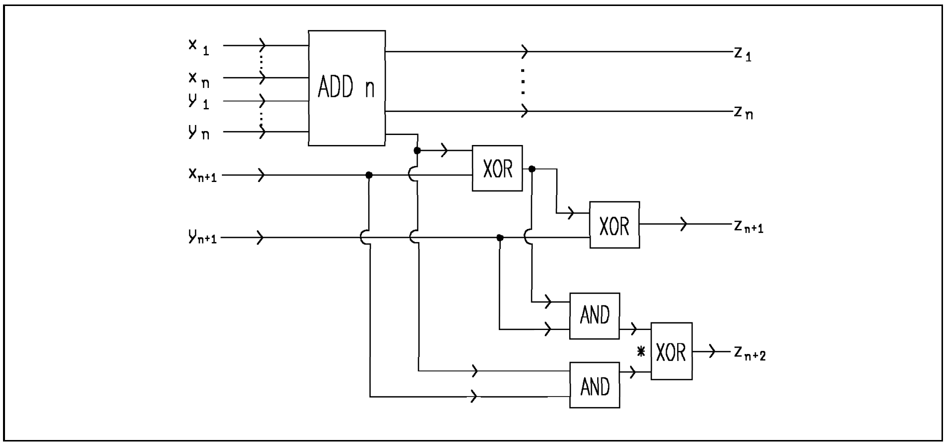

Abbildung 6.5: Addierwerk für $n + 1$ Stellen

(Ein XOR-Schaltelement braucht bei gewissen Typen von AND-Schaltelementen an dem mit $*$ markierten Knoten nicht installiert zu werden, weil wegen $y(x + z - 2xz)xz = 0$ die beiden AND-Ausgänge niemals gleichzeitig signalführend sind.)

Kapitel 7

Einführung der Quantoren

Die Aussagenlogik reicht schon nicht aus, um die aristotelischen Syllogismen logisch zu erfassen („Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.“). Noch weniger ist sie geeignet, die logische Feinstruktur mathematischer Aussagen wiederzugeben. Man betrachte folgende **Beispiele**:

1) Es gibt auf der Erde keinen Ort, der mit allen Orten auf dem Landwege verbunden ist.
2) Zu jedem Ort auf der Erde gibt es einen anderen, der nicht mit ihm auf dem Landwege verbunden ist.
3) Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y, so daß $z_2 + xz + x_2 \geq y$ für alle reellen Zahlen z.
4) Es gibt keine reelle Zahl x, so daß zu jedem reellen y ein reelles z existiert mit $z_2+xz+x_2 < y$.

Man merkt sofort, daß die Aussagen 1) und 2) gleichwertig sind, und mit etwas mehr Mühe erkennt man auch die Gleichwertigkeit von 3) und 4). Um die *logische* Natur dieser Beziehungen sichtbar zu machen, muß man neben den Junktoren weitere immer wiederkehrende Aussagebestandteile als rein logische Sprachelemente herauslösen:

Es wird in den Aussagebeispielen 1) bis 4) über die Existenz oder Nichtexistenz gewisser Objekte gesprochen, die zu anderen Objekten in irgendwelchen Beziehungen stehen oder gewisse Eigenschaften haben. Das ist eine typische mathematische Aussagesituation und veranlaßte Gottlob Frege (1848-1925), der die mathematischen Argumentationsweisen einer genauen logischen Analyse unterzog, *Objektvariablen* und die sogenannten *Quantoren* in die Logik einzuführen.

Wir wollen die Aussagen 1) bis 4) mithilfe solcher Variablen und Quantoren in eine formalisiertere Gestalt bringen.

Zunächst führen wir die Bezeichnung $\phi(x, y)$ ein, die besagen soll:

„Der Ort x ist mit dem Ort y auf dem Landwege verbunden.“

Dabei sind x und y *Variablen* für Orte, und ϕ ist eine *zweistellige Relation* (oder: ein zweistelliges *Prädikat*). Als weitere zweistellige Relation sei $\chi(x, y)$ definiert mit der Bedeutung:

„Es gibt eine reelle Zahl z mit $z^2 + xz + x^2 < y$.“

Die Variablen x und y stehen nun nicht für Orte der Erde, sondern für reelle Zahlen. Die Negation $\neg\chi(x, y)$ bedeutet offenbar:

„Für alle reellen Zahlen z gilt $z^2 + xz + x^2 \geq y$.“

Weiterhin führen wir den *Allquantor* $\forall x(\ldots)$ ein, der besagen soll:

„Für alle x gilt: …“,

ferner den *Existenzquantor* $\exists x(\ldots)$ mit der Bedeutung:

„Es gibt ein x, so daß gilt: …“.

Dabei steht „…“ jeweils für eine korrekt gebildete Formel, in der die Variable x vorkommen kann, aber nicht muß. Man nennt den durch „…“ bezeichneten Formelteil den *Wirkungsbereich* des Quan-

tors und jedes Auftreten der Variablen x in diesem Bereich *gebunden* durch den Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$; im Gegensatz dazu heißt eine nicht durch den Quantor gebundene Variable in einer Formel *frei*. (Die gleiche Variable kann zugleich in einer Formel gebunden und frei auftreten, wie wir an Beispielen sehen werden.)
Um Klammern zu sparen, sei noch vereinbart, daß der Wirkungsbereich eines Quantors nur dann eingeklammert werden muß, wenn auf ihn rechts noch weitere Formelteile folgen.
Mit den getroffenen Vereinbarungen lassen sich die Aussagen 1) bis 4) folgendermaßen formalisieren:

$$\neg \exists x \forall y \; \phi(x,y) \tag{1}$$

und

$$\forall x \exists y \; \neg\phi(x,y) \tag{2}$$

entsprechen 1) bzw. 2),

$$\forall x \exists y \; \neg\chi(x,y) \tag{3}$$

und

$$\neg \exists x \forall y \; \chi(x,y) \tag{4}$$

repräsentieren 3) bzw. 4).
Man sieht bei dieser Schreibweise sofort, daß (1) und (4) sowie (2) und (3) jeweils eine übereinstimmende logische Struktur haben und die Äquivalenz von 1) und 2) sowie von 3) und 4) auf denselben logischen Sachverhalt zurückzuführen ist, nämlich auf die generelle Äquivalenz von

$$\neg \exists x \forall y \ldots$$

und

$$\forall x \exists y \neg \ldots$$

Kapitel 8

Die Sprachelemente der Prädikatenlogik

In den Beispielen sind alle typischen Sprachelemente aufgetreten, durch welche sich die prädikatenlogischen Formeln von denjenigen der Aussagenlogik unterscheiden. Eine prädikatenlogische Formel ist aufgebaut aus

- Variablenzeichen,
- n-stelligen Funktionszeichen (n=0,1,2...),
- n-stelligen Relationszeichen,
- den logischen Junktoren,
- den Quantoren.

Eine zahlentheoretische Formel, in der all diese Sprachelemente vorkommen:

$$\forall m \exists n \forall k \;\; k > n \Rightarrow k^3 > mk^2 + 1$$

Will man nur die formallogische Struktur ausdrücken, benutzt man nicht konkrete Funktions- und Relationsnamen und die zugehörigen speziellen Schreibkonventionen, sondern etwa
$x_1, x_2, x_3, \ldots$ für Variablen,
$f_1, f_2, f_3, \ldots$ für Funktionen,
$R_1, R_2, R_3, \ldots$ für Relationen.
Die soeben betrachtete Formel erhält dann z.B. die Gestalt

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \;\; R_1(x_3, x_2) \Rightarrow R_1(f_1(x_3), f_2(f_3(x_1, f_4(x_3)), f_5)).$$

Dabei entspricht R_1 der zweistelligen „Größer“-Relation, f_1 der einstelligen „Hoch drei“-Funktion, f_2 der zweistelligen Additionsfunktion, f_3 der zweistelligen Multiplikationsfunktion, f_4 der einstelligen „Hoch zwei“-Funktion und f_5 schließlich der konstanten („nullstelligen“) Funktion mit Wert 1.

Für theoretische Aussagen über die „Mechanik“ des Kalküls ist es einfacher, sich auf eine solche normierte Schreibung zu beziehen; die Lesbarkeit geht aber, das zeigt schon dies einfache Beispiel, ohne die üblichen Sonderschreibweisen und vielerlei Abkürzungen schnell verloren. Wir werden deshalb im folgenden die „menschlicheren“ mathematiküblichen Schreibweisen benutzen.
Bei jeder Formel ist die genaue Festlegung des Wirkungsbereichs jedes Quantors ganz wichtig. Einige **Beispiele**:

$$\forall m \exists n \forall k \exists l \quad (n = kl) \Rightarrow k = 1 \vee k > m \tag{1}$$

$$\forall m \exists n \forall k \exists l \quad n = kl \Rightarrow k = 1 \vee k > m \tag{2}$$

$$\forall m \exists n \quad (m = 2^n) \vee \exists k \;\; m + 1 = k + n \tag{3}$$

$$\forall m \exists n \quad m = 2^n \vee \exists k \;\; m + 1 = k + n \tag{4}$$

$$\forall m (\exists n (m = 2n \wedge n > 1)) \Rightarrow \exists k \exists l \quad \mathrm{Prim}(k) \wedge \mathrm{Prim}(l) \wedge m = k + l \tag{5}$$

$$\forall m \exists n (m = 2n \wedge n > 1) \Rightarrow \exists k \exists l \quad \mathrm{Prim}(k) \wedge \mathrm{Prim}(l) \wedge m = k + l \tag{6}$$

Die in (3) und (6) auftretende einstellige Relation $\mathrm{Prim}(n)$ ist eine Abkürzung für

$$\forall k \forall l \quad n = kl \Rightarrow k = 1 \vee l = 1$$

mit der Bedeutung „n ist Primzahl".
(Solche Abkürzungen muß man in der Mathematik ständig einführen, um Aussagen überschaubar zu halten.)

Die Formeln (1) und (2) unterscheiden sich nur durch den Wirkungsbereich des Quantors $\exists l$. Das hat zur Folge, daß (2) trivialerweise wahr ist (z.B. mit $n = 1$), während (1) die Existenz unendlich vieler Primzahlen behauptet. Man beachte, daß keineswegs durch die Ausdehnung des Wirkungsbereiches von $\exists l$ eine vorher freie Variable gebunden wird. Daß ein solcher Effekt eine Formel erheblich verändern kann, liegt auf der Hand:
In (3) z.B. tritt n gebunden und frei auf, und da die freie Form für irgendeine beliebige natürliche Zahl steht, ist die Formel nicht allgemeingültig. Bei (4) hingegen ist jedes Auftreten von n durch $\exists n$ gebunden und die Formel wahr (z.B. mit der Wahl $n = 1, m = k$).
Formel (5) schließlich ist trivialerweise wahr, weil die Vorderformel von „$\Rightarrow$" falsch ist, während (6) die noch unbewiesene Goldbachsche Vermutung formuliert (Jede gerade Zahl > 2 ist die Summe zweier Primzahlen.).

Die Bezeichnung von Variablen ist im Prinzip belanglos, aber bei *Umbenennungen* muß man folgendes beachten:

- Es dürfen nicht zwei vorher verschiedene Variablen nach der Umbenennung gleich sein;
- wird eine Quantorvariable geändert, müssen alle durch diesen Quantor gebundenen Variablen mitgeändert werden, und der neue Variablenname darf nicht mit einem der bisher im Wirkungsbereich des Quantors frei vorkommenden übereinstimmen;
- wird eine freie Variable geändert, so muß jedes freie Vorkommen entsprechend mitgeändert werden, und keines dieser Vorkommen darf nach der Änderung gebunden sein.

Diese Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn die Umbenennung der Variablen eine Bijektion ist. Es ist aber z.B. auch

$$\forall m \exists n \;\; (m = 2^n) \vee \exists k \;\; m + 1 = k + l \tag{7}$$

logisch gleichwertig zu (3).
Es ist zwar nicht zwingend, aber oft zweckmäßig, in einer Formel keine gebundenen Variablen zugleich als freie Variablen zu verwenden und für jeden Quantor eine andere Quantorvariable zu benutzen. Formel (7) ist durchsichtiger als (3) und auch klarer als die ebenfalls logisch gleichwertige Formel

$$\forall m \exists n \;\; (m = 2^n) \vee \exists n \;\; m + 1 = n + k. \tag{8}$$

Zum Zweck der Umformung in die äquivalente Formel

$$\forall m \exists n \;\; m = 2^n \vee m + 1 = n + k$$

ist allerdings (8) besser geeignet.

In der Mathematik hat man es oft mit mehreren klar abgegrenzten Variabilitätsbereichen zu tun, weshalb man meistens folgende Varianten der Quantorenschreibweise benutzt:

$$\begin{aligned} \forall x \in M\ (A) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x (x \notin M \vee A), \\ \exists x \in M\ (A) \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x (x \in M \wedge A). \end{aligned}$$

Insbesondere lauten die de Morgan-Regeln dann

$$\neg \forall x \in M\ (A) \quad \sim \quad \exists x \in M\ (\neg A)$$

und

$$\neg \exists x \in M\ (A) \quad \sim \quad \forall x \in M\ (\neg A).$$

Hat man mehrere Quantoren hintereinander, muß man jeden Quantor durch den jeweils anderen ersetzen, z.B. („f ist nicht fastperiodisch"):

$$\neg(\forall \epsilon > 0\, \exists x > 0\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists t \in (y, y+x)\, \forall z \in \mathbb{R} \mid f(z) - f(z+t) \mid < \epsilon)$$

ist äquivalent zu

$$\exists \epsilon > 0\, \forall x > 0\, \exists y \in \mathbb{R}\, \forall t \in (y, y+x)\, \exists z \in \mathbb{R} \mid f(z) - f(z+t) \mid \geq \epsilon$$

Hierbei wurden noch Schreibweisen wie $\forall \epsilon > 0$ anstelle von $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ benutzt.

Eine andere mathematikübliche Quantorenschreibweise:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

anstelle von

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = g(x) + h(x)).$$

Manchmal benutzt man noch die Bezeichnung $\exists!\ x(\ldots)$ mit der Bedeutung:
„Es gibt *genau ein* x, so daß …".

Kapitel 9

Wahre Formeln der Prädikatenlogik

Der Begriff der wahren Formel, der Tautologie, in der Prädikatenlogik ist weit weniger trivial als der entsprechende Begriff der Aussagenlogik. Denn bei der aussagenlogischen Formel sind alle Interpretationsmöglichkeiten durch die endliche Kombinatorik der Wahrheitstafelmethode zu erfassen, während bei der quantorenlogischen Formel z.B. die Variablen Bezug nehmen auf *irgendeinen Objektbereich*, also bei der Beurteilung der Allgemeingültigkeit einer Formel das Zutreffen für *jeden denkbaren Objektbereich* überprüft werden muß. Wir formulieren dies in einer Definition:

Definition 5 *Semantischer Wahrheitsbegriff*

Eine quantorenlogische Formel heißt allgemeingültig (oder Tautologie), wenn bei jeder Interpretation der in ihr auftretenden freien Variablen durch Dinge irgendeines nichtleeren Objektbereichs und bei Interpretation der auftretenden Relations- und Funktionszeichen durch Relationen und Funktionen dieses Objektbereichs diese Formel in eine wahre Aussage über diesen Objektbereich übergeht.

Wenn man davon ausgeht, daß die formale Logik als Fundament der Mathematik gedacht ist, kann eine solche Begriffsbildung nicht ganz zufriedenstellen, da sie offenbar auf eine naive Mengenlehre zurückgreift, also einen methodischen *circulus vitiosus* in die Grundlegung der Mathematik einschleppt. So manchen mathematischen Logiker scheint das nicht zu kümmern, weil er die mathematische Logik eher als Teilgebiet denn als Fundament der modernen Mathematik ansieht. Es ist aber andererseits doch so, daß die meisten fruchtbaren Impulse und Ideen der modernen Logik aus Anstrengungen zur exakten methodischen Begründung der Mathematik herrühren. Und gemessen daran könnte die heute florierende mengentheoretisch-semantische mathematische Logik als Karikatur empfunden werden. Andererseits muß man aber bedenken: *Wenn* es irgendwie auf andere Weise gelungen ist, die Korrektheit des mathematischen Argumentierens zu sichern, oder wenigstens plausibel zu machen, dann sind auch die mit mengentheoretischen Methoden gewonnenen Aussagen der mathematischen Logik zumindest ebenso stichhaltig wie andere mathematische Aussagen.

Satz 5 *Einige wahre Formeln*

Folgende Formeln sind allgemeingültig:

1. $A \Rightarrow \exists x\, A$
2. $\forall x\, (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x\, (A) \Rightarrow \forall x\, (B))$
3. $(\exists x\, (A) \Rightarrow \exists x\, (B)) \Rightarrow \exists x\, (A \Rightarrow B)$
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x\, (A) \Rightarrow B)$ *(vordere Generalisierung)*
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists x\, B)$ *(hintere Partikularisierung)*
6. $\exists x \forall y\ A \Rightarrow \forall y \exists x\ A$

Einige Äquivalenzen:

1. $\forall x \forall y\, A \sim \forall y \forall x\, A$
2. $\exists x \exists y\, A \sim \exists y \exists x\, A$
3. $(\forall x\, A) \wedge (\forall x\, B) \sim \forall x\ A \wedge B$
4. $\left.\begin{array}{lcl} \neg(\forall x\, A) & \sim & \exists x\, \neg A \\ \neg(\exists x\, A) & \sim & \forall x\, \neg A \end{array}\right\}$ *de Morgansche Regeln*
5. *Wenn x nicht frei in A vorkommt, gilt:*

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{1) } A \vee \exists x\, B & \sim & \exists x\, (A \vee B) \\ \text{2) } A \wedge \forall x\, B & \sim & \forall x\, (A \wedge B) \end{array}\right\} \textit{Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{1) } A \vee \forall x\, B & \sim & \forall x\, (A \vee B) \\ \text{2) } A \wedge \exists x\, B & \sim & \exists x\, (A \wedge B) \end{array}\right\} \textit{Distributivgesetze}$$

Beweis:

Wir beweisen nur exemplarisch die Formel 3., wobei wir die de Morgan-Regeln 4. benutzen.

$$\exists x\, (A) \Rightarrow \exists x\, (B)$$

ist äquivalent zu

$$\neg \exists x\, (A) \vee \exists x\, (B)$$

und damit zu

$$\forall x\, (\neg A) \vee \exists x\, (B);$$

also ist die Formel 1.c. äquivalent zu

$$\neg(\forall x\, (\neg A) \vee \exists x\, (B)) \vee \exists x\, (A \Rightarrow B),$$

d.h. zu

$$(\exists x\, (A) \wedge \forall x\, (\neg B)) \vee \exists x\, (\neg A \vee B).$$

Wenn das linke Disjunktionsglied nicht zutrifft bei einer Interpretation, gilt entweder $\neg A$ für alle x, oder für ein x gilt B. Auf jeden Fall gilt dann $\neg A \vee B$ für ein x, d.h. das rechte Disjunktionsglied trifft zu. □

In den Formeln dieses Satzes stehen A und B für beliebige quantorenlogische Formeln, nicht etwa nur für atomare Aussagen (wie in der Aussagenlogik).

Wegen der größeren Kompliziertheit des semantischen Wahrheitsbegriffs hat man nun in der Quantorenlogik kein einfaches *Entscheidungsverfahren*, die Allgemeingültigkeit oder Nichtallgemeingültigkeit einer Formel zu überprüfen. Man hat nicht nur keines gefunden bisher, es gilt sogar:

Satz 6 *A. Church, 1936*

Es gibt kein explizites Entscheidungsverfahren für die Formeln der Quantorenlogik.

Dennoch ist es möglich, eine präzise Beschreibung aller wahren Formeln mittels eines *Ableitungskalküls* zu geben.

Der Ableitungskalkül besteht aus *Axiomen* und einer *Ableitungsregel*:

Alle Formeln der folgenden Formen sind *Axiome*:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \tag{A1}$$
$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \tag{A2}$$
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \tag{A3}$$
$$\forall x\,(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x\,B),\text{ falls } x \text{ nicht frei in } A \text{ vorkommt} \tag{A4}$$
$$\forall x\,(A) \Rightarrow A\,|_{x=y}\ \text{, falls } x \text{ in keiner Teilformel } \forall y(B) \text{frei vorkommt} \tag{A5}$$

Dabei steht $A\,|_{x=y}$ für die Formel, die aus A entsteht, wenn man jedes frei vorkommende x durch y ersetzt. Die Bedingungen bei (A4) und (A5) sind keine echte Einschränkung, da sie durch Umbenennung der gebundenen Variablen stets zu erfüllen sind.

Die *Ableitungsregel* ist der schon aus der Aussagenlogik bekannte *Modus ponens* (MP).

Mit semantischen Argumenten kann man nun zeigen (und damit zumindest eine konsistente Rechtfertigung des Kalküls liefern):

Satz 7 *Gödelscher Vollständigkeitssatz, 1930*
Jede allgemeingültige Formel der Quantorenlogik läßt sich mithilfe der Regel (MP) aus Axiomen der Typen ((A1) bis ((A5) herleiten.

(Läßt man die Axiomentypen (A4) und (A5) weg und beschränkt sich auf aussagenlogische Formeln, erhält man wieder den Ableitungskalkül für die Aussagenlogik.)

Somit hat man in Gestalt von ((A1) bis ((A5) und (MP) eine explizite finite Charakterisierung der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik. Der Haken ist nur: Der Kalkül beschreibt nur, wie eine korrekte Ableitung einer Tautologie auszusehen hat, aber *nicht*, wie man - bei vorgelegter (Vielleicht-)Tautologie - eine solche Ableitung finden kann! Dafür gibt es (nach Satz 6) kein konkretes Rezept.

Kapitel 10

Mathematische Beweise

Mathematische Aussagen haben oft die Form: „Aus A folgt B“. Streng formallogisch betrachtet, steckt aber meistens weit mehr dahinter!

Gehen wir aus von einem Beispiel:

> „Jeder angeordnete Körper ist unendlich.“

Hier hat man die beiden Aussagen

> A: „Die Menge K ist ein angeordneter Körper.“

und

> B: „Die Menge K ist unendlich.“

Um nun „Aus A folgt B“ zu beweisen, benutzt man irgendwelche als bekannt vorausgesetzte (schon bewiesene) Eigenschaften angeordneter Körper, aber möglicherweise auch irgendwelche anderen Eigenschaften von Mengen, d.h. Folgerungen aus dem mengentheoretischen Axiomensystem der Mathematik. Die zu beweisende mathematische Aussage ist also eigentlich:

> „Ist K ein Objektbereich, für den die Axiome der Mengenlehre gelten sowie die durch die Definition des Begriffs ’Angeordneter Körper’ beinhalteten Aussagen, so ist K eine unendliche Menge.“

Kurz gesagt:
„Aus A und den Axiomen der Mengenlehre folgt B.“

Dies läßt sich aber nicht als prädikatenlogische Formel aufschreiben, da das Axiomensystem der Mengenlehre (wie dasjenige der Prädikatenlogik) aus unendlich vielen Axiomen besteht. Um den intendierten Sinn einer mathematischen Aussage logisch präzise zu erfassen, muß man den semantischen Folgerungsbegriff (Definition 3) auf unendliche Prämissenmengen verallgemeinern:

Definition 6 *Semantischer Folgerungsbegriff*

> *Eine Formel B folgt aus einer Formelmenge* $\mathbf{A}$*, in Zeichen* $A \models B$*, wenn bei jeder Interpretation der in* $A \cup B$ *auftretenden Objekt-, Relations- und Funktionssymbole, für die alle Formeln aus* $\mathbf{A}$ *wahr sind, auch B wahr ist.*

Ob jeder mathematischen *Folgerung* im Sinne dieser Definition (die natürlich ebenso wie Definition 5 auf eine schon zur Verfügung stehende ’naive’ Mengenlehre angewiesen ist!) auch eine *Ableitung* im Prädikatenkalkül entspricht, ist nicht von vornherein klar, da eine Ableitung ja immer nur auf endlich viele Prämissen zurückgreifen kann.

Dies wird geklärt durch den

Satz 8 *Endlichkeitssatz*
Folgt B aus einer Formelmenge $\mathbf{A}$, *so gibt es eine endliche Teilmenge* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *von* $\mathbf{A}$, *aus der auch schon B folgt.*

Zusammen mit dem Gödelschen Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik ergibt sich also

Satz 9
Zu jeder in einer mathematischen Theorie gültigen Aussage B gibt es endlich viele Axiome $A_1, \ldots, A_n$ *der Theorie, so daß*

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$$

im Prädikatenkalkül ableitbar ist.

Kurz gesagt: Jede in einer mathematischen Theorie wahre Formel ist in endlich vielen Schritten ableitbar.

Die nichttriviale Aufgabe, eine Ableitung für eine Formel B zu finden, wird manchmal erleichtert durch eine Umformulierung der Aussage. Besonders wirkungsvoll ist die Technik des *indirekten Beweises*:

Statt $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}$ zu beweisen, beweist man die als Kontraposition logisch gleichwertige Formel

$$\neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{A}_1 \vee \ldots \vee \neg\mathrm{A}_n.$$

Und da $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}$ logisch gleichwertig ist zu $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}_1^* \vee \ldots \vee \neg A_m^*$, wenn neben $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ auch $\mathrm{A}_1^*, \ldots, \mathrm{A}_m^*$ irgendwelche schon als gültig vorausgesetzte Formeln sind, kann man auch

$$\mathrm{A}_1^* \wedge \ldots \wedge A_m^* \wedge \neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$$

als Kontraposition der zu beweisenden Formel wählen. (Dabei wurde benutzt, daß man statt Axiomen auch andere schon aus den Axiomen gefolgerte Formeln zum Ausgangspunkt neuer Ableitungen machen kann; dies ergibt sich ja unmittelbar aus der Ableitungsregel, dem *Modus ponens*.)

Resultat ist die

Methode des indirekten Beweises
Um eine mathematische Aussage (Formel) B herzuleiten, kann man stattdessen aus $\neg B$ und irgendwelchen schon bewiesenen Formeln die Negation *irgendeiner* als gültig bekannten Formel herleiten.

Man nennt einen solchen Beweis auch *Widerspruchsbeweis*, weil die dabei hergeleitete Negation einer als gültig angenommenen Formel ja ïm Widerspruch stehtßu den Voraussetzungen; ¬B heißt in diesem Zusammenhang dann *Widerspruchsannahme*.

Die indirekte Beweismethode bringt insofern oft eine Beweiserleichterung, als man zusätzlich zu den schon bekannten Formeln ¬B als Voraussetzung zur Verfügung hat und außerdem nicht die spezielle Formel B herleiten muß, sondern nur irgendeine aus einer ganzen Klasse von Formeln.

Ein typisches einfaches Beispiel für den indirekten Beweis ist der Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Dies ist zugleich ein Beispiel für einen *Unmöglichkeitsbeweis*: Die Nichtexistenz eines Objektes mit einer gewissen Eigenschaft wird bewiesen, indem die Annahme seiner Existenz zum Widerspruch geführt wird:

Angenommen, für zwei teilerfremde natürliche Zahlen p und q gilt $(p/q)^2 = 2$. Dann folgt $p^2 = 2q^2$ Also ist p^2 gerade und damit auch p. Folglich $p = 2p_0$ und somit $4p_0^2 = 2q^2$, $2p_0^2 = q^2$. Also ist auch q^2 und damit q gerade; Widerspruch!

Wenn sich dies auch nicht logisch präzise fassen läßt, so gibt ein sogenannter *direkter Beweis*, bei dem man schrittweise von den Prämissen zur zu beweisenden Behauptung B gelangt, im allgemeinen doch eher als ein indirekter Beweis das Gefühl, daß man nach Kenntnis des Beweises weiß, „warum“ B gilt.

Ein gelegentlicher beweistechnischer Anfängerfehler besteht darin, eine Aussage dadurch begründen zu wollen, daß man von ihr durch schrittweise Folgerung zu einer als wahr bekannten Aussage gelangt. Ein solcher Beweisversuch ist jedoch nur dann stichhaltig, wenn jeder Folgerungsschritt eine *Äquivalenzumformung* ist; denn aus etwas Falschem läßt sich formallogisch korrekt Beliebiges (auch Richtiges) folgern (*Ex falso quodlibet*). So ist z. B. für beliebige Aussagen A und B die Formel $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ eine Tautologie.

Die *vollständige Induktion*, eine besonders leistungsfähige mathematische Beweismethode, gehört nicht zur allgemeinen Logik des Beweisens, sondern ist das Fundament der Lehre von den natürlichen Zahlen und damit schon Teil der Mathematik. Ihrer logischen Struktur nach läßt sich die vollständige Induktion als Spezialfall der indirekten Beweismethode auffassen:

Zu beweisen sei die Gültigkeit von

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n))\,.$$

Man macht die Widerspruchsannahme

$$\neg\,\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n))\,,\ \text{also}\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ (\neg\mathrm{A}(n))\,.$$

Es ist nun eine fundamentale Eigenschaft der natürlichen Zahlen („Wohlordnung“ von $\mathbb{N}$), daß es dann ein *kleinstes* natürliches n_0 gibt mit $\neg\mathrm{A}(n_0)$. Durch den Nachweis von

$$\mathrm{A}(1)\ \text{und}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n-1) \Rightarrow \mathrm{A}(n))$$

führt dies zu einem Widerspruch, ebenso natürlich durch den Nachweis von

$$\mathrm{A}(1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}(n_0 - 1) \Rightarrow \mathrm{A}(n_0).$$

Erst durch die genaue Erfassung der logischen Struktur mathematischer Beweise, in die dieser Schlußabschnitt einen Einblick geben sollte, ist eine explizite Kodifizierung des korrekten mathematischen Schließens möglich geworden. Die Kalküle der formalen Logik (insbesondere die „Resolution“, siehe etwa Schöning [1]) liefern auch die Grundlage für die KI-orientierte Programmiersprache PROLOG und für die Verfahren des „automatischen Beweisens“.

Der Prozeß der mathematischen Erfindung aber wird durch die formallogisch präzise Beschreibung von Beweisen bestenfalls karikiert. Denn der Mathematiker läßt sich bei seinen Überlegungen weniger vom Formelapparat seiner logischen und mathematischen Axiome leiten als vielmehr von intuitiven Vorstellungen. Geschicklichkeit im mathematischen Beweisen setzt also neben einer Beherrschung des Formelapparates auch eine durch Erfahrung gereifte mathematische Intuition voraus. Letztere ist nur sehr schwer einem Computer-Programm beizubringen, weil vieles dabei unbewußt abläuft; und auch die Studierenden können sich da bis auf weiteres nur an ein von Paul R. Halmos formuliertes Rezept halten, bei welchem auf unbewußtem Lernen das Hauptgewicht liegt:

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Literaturverzeichnis

[1] U.SCHÖNING: Logik für Informatiker; BI, Mannheim 1987

[2] D.HILBERT/W.ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik, 5. Auflage; Springer, Berlin 1967

[3] W.K.GILOI/H.LIEBIG: Logischer Entwurf digitaler Systeme; Springer,Berlin 1973

[4] E.P.LYNCH: Applied Symbolic Logic; Wiley, New York 1980

[5] A.SCHÖNE: Digitaltechnik und Mikrorechner; Vieweg, Wiesbaden 1984

[6] H.-D.EBBINGHAUS/J.FLUM/W.THOMAS: Einführung in die mathematische Logik; Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1978

[7] M.M.RICHTER: Logikkalküle; Teubner, Stuttgart 1978

[8] Y.I.MANIN: A Course in Mathematical Logic; Springer, New York 1977

[9] J.R.SHOENFIELD: Mathematical Logic; Addison-Wesley, Reading 1967

[10] J.BARWISE(ed.): Handbook of Mathematical Logic; North Holland, Amsterdam 1977

[1] ist eine ausgezeichnete moderne Einführung für Anfänger, [2] ein noch immer sehr lesenswertes, auch didaktisch gut aufgebautes klassisches Werk zweier bedeutender Wissenschaftler; [3, 4, 5] behandeln Anwendungen der formalen Logik auf elektronische Schaltungen, chemische Anlagenplanung, usw.

[6, 7, 8, 9, 10] sind - in etwa nach ansteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet - anspruchsvollere Monographien zur modernen mengentheoretischen mathematischen Logik. Unter diesen Büchern zeichnet sich [8] durch besondere Originalität aus; Y. I. Manin, Professor in Moskau, ist einer der bedeutendsten zeitgenössischen Mathematiker.

Katalog der Benutzerhandbücher des ZAM (Stand: 08.08.2002)

Eine aktuelle und nach Sachgebieten eingeteilte Liste der Benutzerhandbücher und Technischen Kurzinformationen des ZAM erhalten Sie in der Technischen Kurzinformation TKI-0000 und auf dem WWW-Server des Forschungszentrums unter der
URL: `<http://www.fz-juelich.de/zam/docs/topic/topic_d.html>`.

BHB-0034 MTA-Kurs: PL/I Vorlesungsschrift

BHB-0063 MTA-Kurs: Einführung in Datenverarbeitung - Materialien zum Kurs

BHB-0092 Quantum Chemistry Program Exchange

BHB-0095 Einführung in die Programmiersprache C

BHB-0096 GR - Software

BHB-0097 GKS und CGM Anwendungen inklusive GR-Software auf den zentralen Rechnern

BHB-0101 Einführung in die Benutzung des zentralen AIX

BHB-0102 REDUCE User's Manual

BHB-0105 Kurze Einführung in die formale Logik

BHB-0109 User's Manual for MOLPRO

BHB-0110 XL-Fortran unter AIX auf einer RISC/6000 - Einführung, Hilfsmittel, Erfahrungen

BHB-0111 Statistische Datenanalyse mit SAS und BMDP

BHB-0112 TEX im Forschungszentrum Jülich

BHB-0114 GNUPLOT - An Interactive Plotting Program

BHB-0115 GNU Emacs Manual

BHB-0117 XV - Interactive Image Display for the X Window System

BHB-0118 ImageMagick - User's Guide

BHB-0119 Das Grafiksystem XGraf

BHB-0120 GLI - Graphics Language Interpreter - Reference Manual

BHB-0121 Free recode, version 3.5d - The character set converter, Edition 3.5d

BHB-0122 Tcl and the Tk Toolkit, Part 1 + 2

BHB-0123 Tcl and the Tk Toolkit, Part 3 + 4

BHB-0124 Programmieren in Fortran 90/95 - Vorlesungsskript

BHB-0125 Xhibition - Ein Werkzeug zur Erstellung eines Menü-Systems auf der Basis von X-Window

BHB-0129 xmgr (ACE/gr) Users Manual

BHB-0130 Installationshinweise zur Datensicherung und Archivierung mit TSM/ADSM für Workstations und PCs im JuNet

BHB-0133 Programmieren in Fortran 90/95 - Übungsaufgaben

BHB-0134 LaTeX - eine Einführung und ein bißchen mehr

BHB-0135 LaTeX - Fortgeschrittene Anwendungen oder: Neues von den Hobbits

BHB-0136 Forms Library - Toolkit zur Erstellung graphischer Benutzeroberflächen

BHB-0138 The Cray Systems at Research Centre Jülich - Volume 1 - Handling of Jobs and Data

BHB-0139 The Cray Systems at Research Centre Jülich - Volume 2 - Programming Environment and Application Software

BHB-0140 Programmierung in C - Vorlesungsskript

BHB-0141 Pretty Good Privacy (pgp) Bedienungsanleitung

BHB-0142 BALSAC - User's Guide and Manual

BHB-0144 Gsharp - Tutorial, User's Guide, and Applications

BHB-0145 Gsharp - Reference Guide, Part 1

BHB-0146 Gsharp - Reference Guide, Part 2

BHB-0147 GIMP - Das offizielle Benutzerhandbuch, Teil 1

BHB-0148 GIMP - Das offizielle Benutzerhandbuch, Teil 2

BHB-0149 GIMP - Das offizielle Benutzerhandbuch, Teil 3

BHB-0150 Windows NT V4.0 Workstation - ein Installationsprotokoll

BHB-0152 Introduction To Scilab - User's Guide
BHB-0153 Vampir 2.0 - User's Manual
BHB-0154 Programming in C++ - Part I
BHB-0155 Programming in C++ - Part II
BHB-0156 NWChem User Documentation
BHB-0157 Perl5.005 Handbuch (Teil I)
BHB-0158 Perl5.005 Handbuch (Teil II)
BHB-0159 DDD - Data Display Debugger
BHB-0160 SSH-WIN PC-Benutzerhandbuch
BHB-0161 Grace - ein graphisches Analyse-Tool für 2D Daten
BHB-0162 MOLMOL Manual
BHB-0167 Eine Einführung in Scilab