

Der Quanten-Hall-Effekt

Stefan Blügel[*]
Institut für Festkörperforschung
Forschungszentrums Jülich

1 Einleitung

Fließt ein elektrischer Strom durch einen dünnen Leiter kann normalerweise kein Spannungsabfall normal zur Stromrichtung gemessen werden. Im Jahre 1879 entdeckte ein junger Doktorand namens Edwin H. Hall an der John Hopkins Universität in Maryland, dass es in einem dünnen, stromdurchflossenen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, zu einer Trennung der Ladungsträger kommt. In Metallen werden die Elektronen durch die Lorentzkraft in Richtung einer Seite des Leiters beschleunigt. Dort kommt es zu einer Anreicherung von Elektronen und auf der gegenüberliegenden Seite zu einer Verarmung. Der resultierende Unterschied im elektrischen Potential wird als Hall-Spannung bezeichnet und ist experimentell zugänglich. Dies ist der nach Hall benannte Hall-Effekt, den man heute auch den *klassischen Hall-Effekt* nennt. In der noch zu besprechenden Drude-Theorie werden wir sehen, dass der Hall-Widerstand ϱ_H proportional zur Stärke des Magnetfeldes B , dem Vorzeichen der Ladungsträger e und umgekehrt proportional zur Ladungsträgerkonzentration n ist:

$$\varrho_H \sim \frac{1}{ne} B \quad \text{mit} \quad e = \pm 1. \quad (1)$$

Hall führte seine Experimente bei Raumtemperatur und geringen magnetischen Feldstärken durch. Aus den Messwerten lassen sich die Beweglichkeit, die Driftgeschwindigkeit und die Ladungsträgerdichte in dem Material bestimmen, so dass Versuche zum Hall-Effekt zu den Standardverfahren in Laboratorien in der ganzen Welt gehören.

Bei solchen Messungen zur Untersuchung des Leitungsmechanismus in Metall-Oxid-Silizium-Feldeffekttransistoren (Silizium-MOSFET) bei tiefen Temperaturen (1.5 K = -271.65°C) und unter dem Einfluss starker Magnetfelder (18 Tesla), durchgeführt im Magnetfeldlaboratorium in Grenoble, wurde 1980 der *Quanten-Hall-Effekt* [1] entdeckt. Der Quanten-Hall-Effekt gehört zu den größten Entdeckungen der 80-er Jahre. 1985 erhielt Klaus von Klitzing dafür den Nobelpreis für Physik.

Beim Quanten-Hall-Effekt ist die Probe sehr dünn. Im Idealfall ermöglicht sie den Ladungsträgern Bewegung nur in einer Ebene. Wir sprechen von Elektronen im zweidimensionalen Elektronengas. Das Wort "zweidimensional" bedeutet in diesem Fall, dass

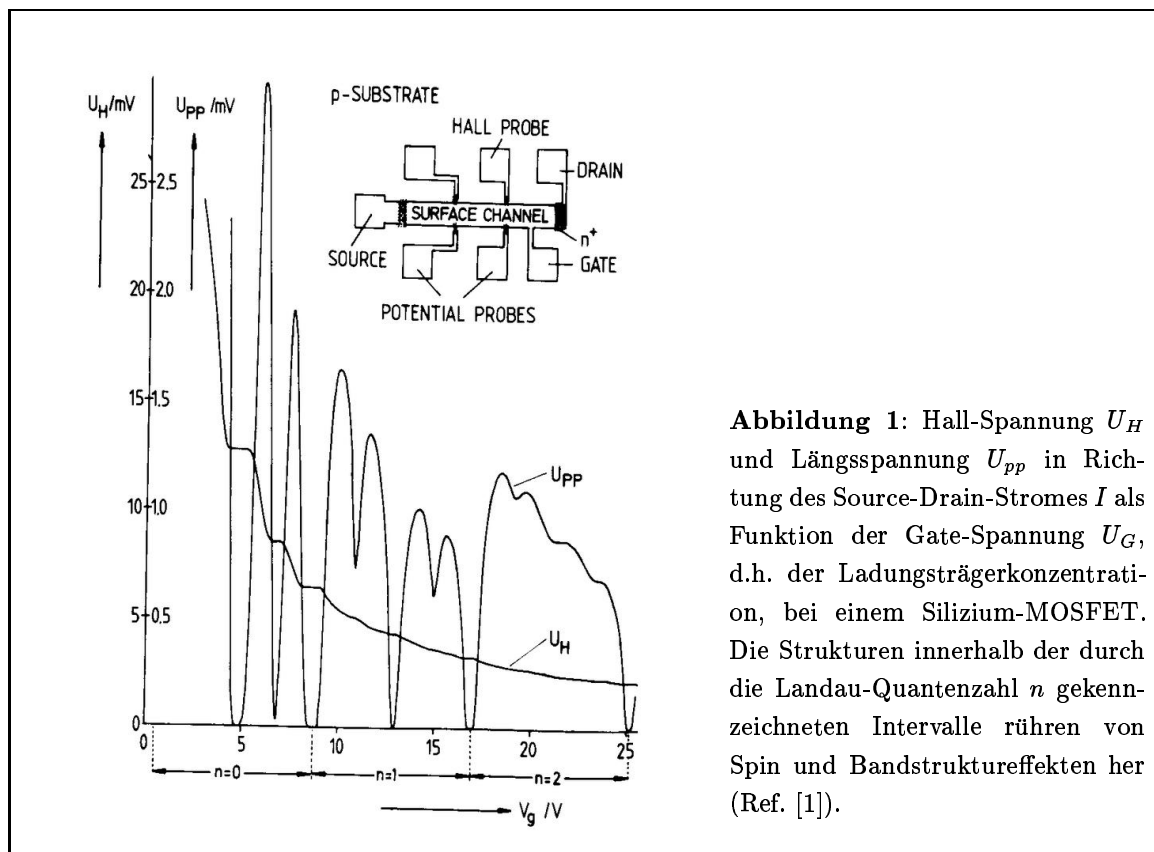


Abbildung 1: Hall-Spannung U_H und Längsspannung U_{pp} in Richtung des Source-Drain-Stromes I als Funktion der Gate-Spannung U_G , d.h. der Ladungsträgerkonzentration, bei einem Silizium-MOSFET. Die Strukturen innerhalb der durch die Landau-Quantenzahl n gekennzeichneten Intervalle rühren von Spin und Bandstruktureffekten her (Ref. [1]).

die Dicke des Elektronengases kleiner als die de Broglie-Wellenlänge ist¹ Außerdem haben die Ladungsträger eine sehr hohe Mobilität, ($\mu \sim 40.000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ Nullfeld-Mobilität für MOSFET und größer als $\mu = 100.000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ für $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ Heterostrukturen). Misst man unter diesen experimentellen Bedingungen die Hall-Spannung U_H (siehe Abb. 1), so zeigt diese nicht, wie klassisch zu erwarten gewesen wäre, einen monoton fallenden Verlauf als Funktion der Gatespannung U_{pp} (d.h. der Ladungsträgerkonzentration n), oder einen linearen Verlauf als Funktion des Magnetfeldes B (siehe Abb. 3), sondern es treten ausgeprägte Sprünge und Plateaus auf. Die Analyse der Messdaten ergab, dass die Höhe der Plateaus, ausgedrückt als Leitfähigkeit, sich immer als das ganzzahlige Vielfache der selben Zahl, e^2/h , herausstellen. Der entscheidende Punkt beim Quantum-Hall-Effekt ist – und das ist wirklich das Unerwartete und Überraschende –, dass die Plateaus dieser Sprünge mit einer extrem geringen Unsicherheit von $\sim 10^{-8}$ immer das Vielfache von e^2/h sind. Man kann in diesem Falle tatsächlich von Quantensprüngen sprechen. Die Längsspannung entlang der Probe ihrerseits zeigt ein markantes oszillatorisches Verhalten (Shubnikov-de-Haas-Effekt), mit Oszillationsamplituden, die viel größer sind als für drei-

¹Die "Dicke" liegt etwa in der Größenordnung von 5–10 nm. Das Eigenwertspektrum als Funktion des dreidimensionalen Bloch-Vektors spaltet auf in einen zweidimensionalen Bloch-Vektors und in ein diskretes Eigenwertspektrum entsprechend dem Freiheitsgrad normal zur Ebene des zweidimensionalen Elektronengases. Die Energieaufspaltung zwischen den einzelnen Subbänder kann $\sim 100 \text{ meV}$ betragen und im Allgemeinen ist nur das unterste Subband besetzt.

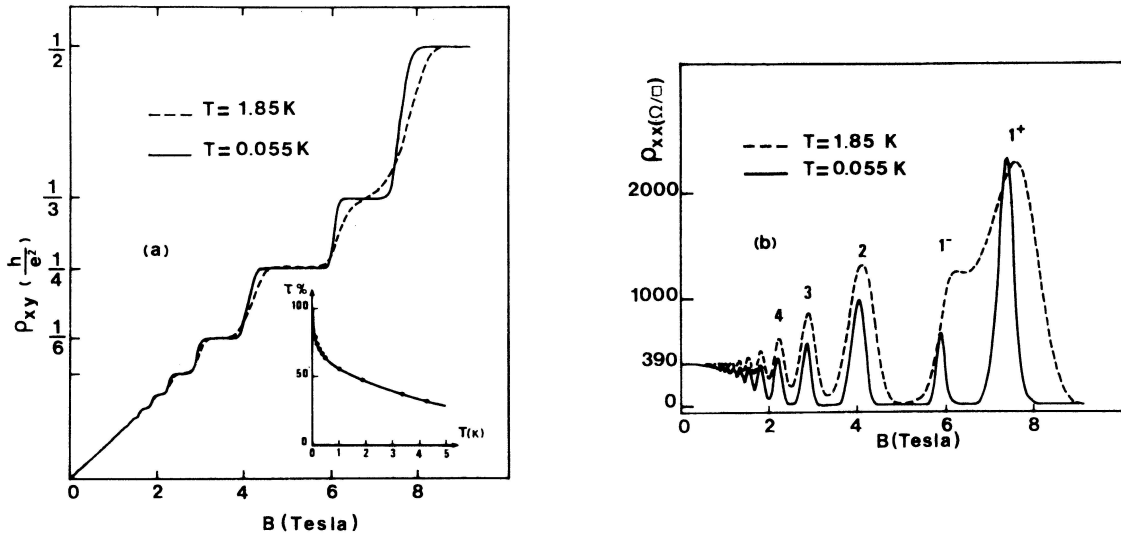


Abbildung 2: Linke Figur: Hall-Widerstand ρ_{xy} als Funktion von B bei unterschiedlichen Temperaturen. Das eingefügte Bild zeigt als Funktion der Temperatur das Verhältnis der Breite des $\rho_{xy} = \frac{h}{4e^2}$ Plateaus gegenüber seiner maximal möglichen Breite. Rechte Figur: Magnetwiderstand ρ_{xx} als Funktion von B bei unterschiedlichen Temperaturen. Die korrespondierenden Landau-Niveaus sind bezeichnet mit 1^+ , 1^- , 2 ... (Ref. [2]).

dimensionale Proben. Die Plateaus in der Hall-Spannung fallen dabei mit ausgedehnten Minima bei der Längsspannung zusammen. Bei genügend tiefer Temperatur werden die Minima in der Längsspannung unmessbar klein, und zumindest beim absoluten Nullpunkt der Temperatur, ist als Folge der Stromtransport durch die Probe verlustfrei. Zwischen den Stufen wird die Längsspannung endlich.

Kurz nach der Veröffentlichung der MOSFET Daten wurde der Quanten-Hall-Effekt auch an III-V-Halbleiter-Heterostrukturen beobachtet. Ein Beispiel dafür sind die Messungen von Briggs et al. [2] an $\text{InP}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ und von Jeckelmann et al. [3] an $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ Heterostrukturen. Auch in diesen Systemen ist bei tiefen Temperaturen ein zweidimensionales Elektronengas realisiert. Im Gegensatz zum MOSFET lässt sich hier die Dichte dieses Elektronengases nicht variieren. Briggs et al. beobachteten die Plateaus im Hall-Widerstand als Funktion des angelegten Magnetfeldes. Wie aus Abb. 2 ersichtlich ist, werden die Plateaus breiter, und die Übergänge zwischen zwei Plateaus schärfer, wenn die Temperatur erniedrigt wird. Ein besonders präzise aufgelöstes Hall-Experiment ist in Abb. 3 gezeigt. Diese Beobachtung legt es nahe, dass es sich beim Quanten-Hall-Effekt um eine Grundzustandseigenschaft des Systems handelt und in der folgenden theoretischen Diskussion werden wir uns immer auf Grundzustandseigenschaften beschränken. Zusammenfassend kann man sagen, dass beim Quantum-Hall-Effekt der Widerstandstensor ϱ_{ij}

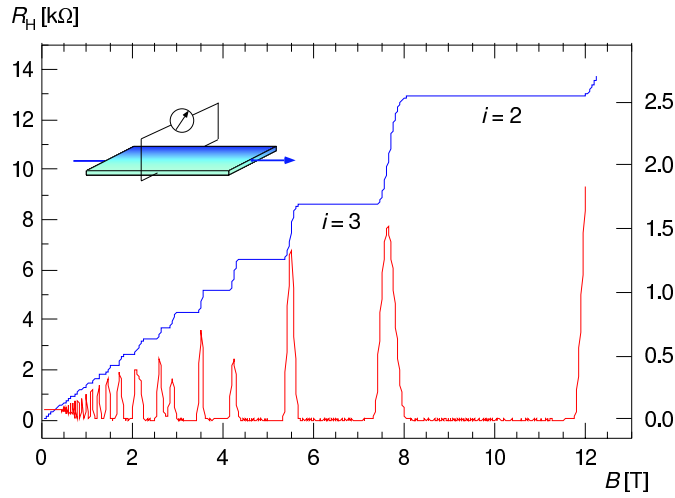


Abbildung 3: Hall-Charakteristik einer GaAs/AlGaAs Heterostruktur bei einer Temperatur von 10 mK und einem Messstrom von 1 μA . Das eingefügte Bild zeigt eine schematische Darstellung des zweidimensionalen Elektronengases (2 DEG). Ein Strom I wird in die Probe eingespeist; die Hall-Spannung V_H und die Längsspannung V_{xx} werden gleichzeitig gemessen. Der Hall-Widerstand (blau, linke Skala) ist definiert als $R_H = V_H/I$ und der Längswiderstand (rot, rechte Skala) als $R_{xx} = V_{xx}/I$. Bildquelle: <http://www.ofmet.ch>

bzw. der Leitfähigkeitstensor σ_{ij} die Form

$$\varrho_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -h/(ne^2) \\ h/(ne^2) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -ne^2/h \\ ne^2/h & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

hat.

Um den Quantum-Hall-Effekt zu würdigen, muss man sich nochmals vor Augen führen, dass die Leitfähigkeit bzw. der spezifische Widerstand eine materialabhängige Größe ist, die zudem noch von der Temperatur, dem Magnetfeld, der Frequenz und anderen variablen Bedingungen des Materials oder der Messung abhängt. All diese Materialparameter, Defekte, und Streuprozesse produzieren genug Unsicherheit, dass die meisten experimentellen Ergebnisse mit einem Fehlerbalken von plus/minus einigen Prozent angegeben werden. Z.B. ist die Leitfähigkeit eines ballistischen Leiters quantisiert in Einheiten von e^2/h . Dies ist natürlich nur wahr, so lange man sich nicht um Abweichungen von ein paar Prozent kümmert, denn reale Leiter sind in Wirklichkeit nicht präzise ballistisch. Im Hall-Zustand gilt diese Quantisierung für eine reale Probe aber mit extremer Genauigkeit. Diese extreme Präzision resultiert aus der nahezu vollständigen Unterdrückung der Dissipation entlang der Längsspannung. D.h. im Hall-Regime sind Elektronenstreuung mit Impulsrelaxation unterdrückt und die Probe wird zu einem wahrhaft idealen ballistischen Leiter von unglaublicher Qualität. Im Hall-Regime wurden für Elektronen mittlere freie Weglängen von

einigen Millimetern gemessen. Diese unvorstellbar langen mittleren freien Weglängen sind nicht die Folge der ungewöhnlichen Reinheit der Proben, sondern offensichtlich ändern unter diesen extremen Bedingungen die Gesetze der Quantenmechanik die Eigenschaften der Elektronen und respektive die Eigenschaften des Hall-Effekts entscheidend.

h/e^2 nennt man das Widerstandsquantum. Es wird auch als die von Klitzing-Konstante R_K , $R_K = 25812.807 \Omega$, bezeichnet. Sie ist demnach eine universelle Naturkonstante genauso wie h , das Plancksche Wirkungsquantum, und e , die Ladung des Elektrons, d.h. eine räumlich und zeitlich unveränderliche Größe. Der Hall-Widerstand R_H ist, wie oben schon gesagt, derzeit mit einer relativen Unsicherheit von 10^{-8} bestimmt und es gilt

$$R_H = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}, \quad (3)$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Wie wir noch sehen werden ist n gerade der Füllfaktor der Landau-Niveaus. Mit der von Klitzing-Konstanten hat man seither eine universelle Bezugsgröße für die Messung von Widerständen, die überall auf der Welt gleich ist. Damit wurde es erstmals möglich, die Einheit Ω des elektrischen Widerstandes mit hoher, jederzeit reproduzierbarer Genauigkeit an einem Halbleiter zu messen, viel exakter als dies bisher durch den Draht-Normalwiderstand der Eichämter gelang. Seit dem 1. Januar 1990 wird der Quanten-Hall-Effekt in den meisten Staaten als primäres Widerstandsnormale eingesetzt. Die genaue Bestimmung der Plateauwerte, sprich h/e^2 , erlaubt aber auch eine sehr genaue Bestimmung der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$, da die Lichtgeschwindigkeit c mittlerweile durch internationale Vereinbarungen festgelegt wurde.

Von Klitzing hatte in seinen Experimenten immer nur ganzzahlige Bruchteile der nach ihm benannten Konstanten beobachtet, also $\frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Zwei Jahre später entdeckten Daniel Tsui, Horst Störmer und Arthur Gossard von den Bell Labs zur Verwirrung aller Theoretiker, dass bei noch tieferen Temperaturen (0.1 K) und noch stärkeren Magnetfeldern (28 Tesla), noch besseren Halbleitersystemen, die eine noch höhere Mobilität der Elektronen in zwei Dimensionen erlauben, gebrochenzahlige Vielfache (Quantenzahlen) von e^2/h auftreten. Hierbei können für den Hall-Widerstand, gegeben durch $\frac{1}{n} R_K$, für n zum Beispiel Werte wie $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}$ usw. auftreten. Deshalb nennt man heute den von Klitzing gefundenen Quanten-Hall-Effekt den *ganzzahligen Quanten-Hall-Effekt* und den später gefundenen, den *fraktionalen* oder *fraktionierten Quanten-Hall-Effekt*. Innerhalb nur eines Jahres nach der Entdeckung stellte Robert B. Laughlin, der auch schon eine wichtige Arbeit zum Verständniss des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts beigetragen hatte, die experimentellen Beobachtungen auf ein theoretisches Fundament. Nach seiner Theorie des damals anormal genannten Quanten-Hall-Effektes kondensiert das zweidimensionale Elektronengas durch die Coulombwechselwirkung untereinander zu einer neuartigen Quantenflüssigkeit, deren Anregung Quasiteilchen bestehend aus Elektronen und zwei oder drei magnetischen Flußquanten, sogenannte "composite" Fermionen, sind.

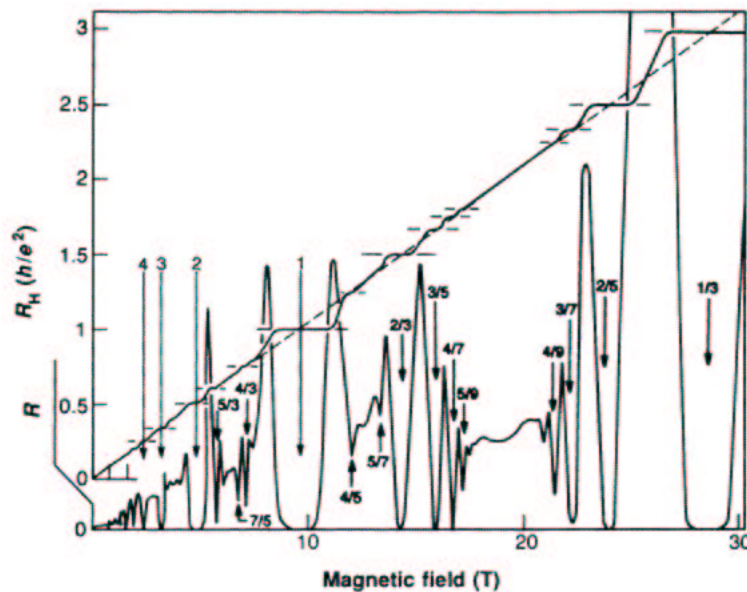


Abbildung 4: Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt: Magnetfeldabhängigkeit des longitudinalen, dissipativen Widerstandes R , und des Hall-Widerstand R_H eines zweidimensionalen Elektronengases hoher Mobilität ($\mu \sim 1.3 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$) realisiert in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur bei tiefen Temperaturen. Die gestrichelte Linie zeigt den Verlauf des klassischen Hall-Widerstandes, die durchgezogene Linie die experimentellen Ergebnisse. Mit Pfeilen ist angegeben, bei welchen magnetischen Feldstärken eine Stufe auftrat. Im linken Teil der Graphik sind bei den schwächeren Magnetfeldern die Stufen zu erkennen, die von Klitzing entdeckt hat und die sich mit einem ganzzahligen Füllfaktor berechnen lassen. Bei extremen Feldstärken treten die Stufen mit gebrochenzahligen Füllfaktoren besonders stark hervor, beispielsweise für $n = 1/3$, die erste zusätzliche Stufe, die Störmer und Tsui entdeckt haben. Bildquelle: Ref. [5].

Diese können selbst wieder zu einer Flüssigkeit kondensieren. Ein faszinierendes neues Arbeitsgebiet im Bereich der Vielteilchenphysik in Festkörpern war eröffnet. 1998 wurden die Arbeiten von Störmer, Tsui und Laughlin zur experimentellen und theoretischen Untersuchung des fraktionalen Hall-Effektes mit dem Nobelpreis geehrt. Der fraktionalen Quanten-Hall-Effekt geht aber über diese Vorlesung hinaus und wir werden ihn nicht diskutieren.

Die experimentellen Ergebnisse verlangen nach einer Erklärung der folgenden Fragen:

1. Warum gibt es Anomalien (Plateaus) im Hall-Widerstand mit $R_H = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$?
2. Warum fließt der Strom unter diesen Umständen ohne Dissipation?
3. Warum gilt $R_H = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$ mit so großer Präzession mit ganzzahliger ($n = 1, 2, 3 \dots$) und rationaler Quantisierung ($n = 1/3, 2/3, 4/3 \dots 1/5, 2/5$)?

Diese Fragen sollen in den folgenden Abschnitten diskutiert werden. Zunächst rekapitulieren wir den klassischen Hall-Effekt. Dann besprechen wir die Theorie des freien Elek-

tronengases im Magnetfeld, die uns zu den Landau-Niveaus führt. Anschließend wird eine Symmetrieeigenschaft des Systems (Eichinvarianz) dazu benutzt werden, um die Resultate zu verallgemeinern. Wir beginnen mit einer kurzen Erläuterung, wie das zweidimensionale Elektronengas realisiert wird.

Vorweg erscheint ein Wort der Warnung angebracht. Nach meinem Stand der Kenntnis existiert zur Zeit noch keine quantitative Theorie der Transportvorgänge im starken Magnetfeld, die auch den Lokalisierungsmechanismus erfasst. Daher können auch keine theoretischen Voraussagen über den Verlauf des Ohmschen und Hall-Widerstandes als Funktion der Ladungsträgerkonzentration, des Magnetfeldes, der Temperatur und der Materialparameter gemacht werden.

2 Realisierung des zweidimensionalen Elektronengases

Zweidimensionale Elektronengase treten nicht natürlich auf, sondern sind eine Folge großartiger technologischer Entwicklungen. Die industrielle Entwicklung von MOSFETs führte zur ersten Realisierung von quasi-zweidimensionalen Elektronenschichten an der Grenzfläche zwischen Silizium und Siliziumoxid. Solche zweidimensionalen Systeme wurden bei der Untersuchung von von Klitzing benutzt. Allerdings begrenzen die in der Oxidschicht gefangenen Verunreinigungen sowie Unregelmäßigkeiten in der Grenzschicht die Mobilität des Elektronengases. Wesentliche Voraussetzung für die Entdeckung des fraktionalen Quanten-Hall-Effekts war die Entwicklung der Halbleitertechnologie, insbesondere der Epitaxie, die es ermöglichte, an der Grenzfläche zwischen zwei Halbleitermaterialien zweidimensionalen Elektronensysteme mit sehr hoher Beweglichkeit zu realisieren. Der Effekt war zunächst nur an diesen hochwertigen Halbleiterschichtsystemen auf der Basis von GaAs und $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, einer Legierung, in der ein gewisser Anteil der Ga-Atome durch Al-Atome ersetzt wird, zu beobachten.

Die Realisierung eines zweidimensionalen Elektronengases ist in Abb. 5 dargestellt. Das Schema eines MOSFET ist in Abb. 5a illustriert. Auf dem p-dotierten Si-Substrat wird eine ca. 500 nm dicke Oxidschicht aufgetragen, um das Al-Gitter vom Halbleiter zu isolieren. Die Kontaktregion Source (S) und Drain (D) sind stark dotiert (n+), um einen Ohmschen Kontakt zwischen der Metallisation und dem Elektronengas zu ermöglichen. Die Bildung des Elektronengases ist im Bandschema in Abb. 5a dargestellt. Das Al-Gitter wird auf ein Potential $+V_g$ gelegt. Das Gitter erzeugt damit ein elektrisches Feld, welches die Elektronen gegen die Grenzfläche zwischen Si und SiO_2 zieht. Zusätzlich bewirkt das Feld eine Krümmung des Valenz- und Leitungsbandes. Falls der Halbleiter p-dotiert ist, besetzen einige Elektronen des Valenzbandes die Zustände der Akzeptoren und hinterlassen Löcher im Valenzband. Die an die Grenzschicht verschobenen Elektronen füllen

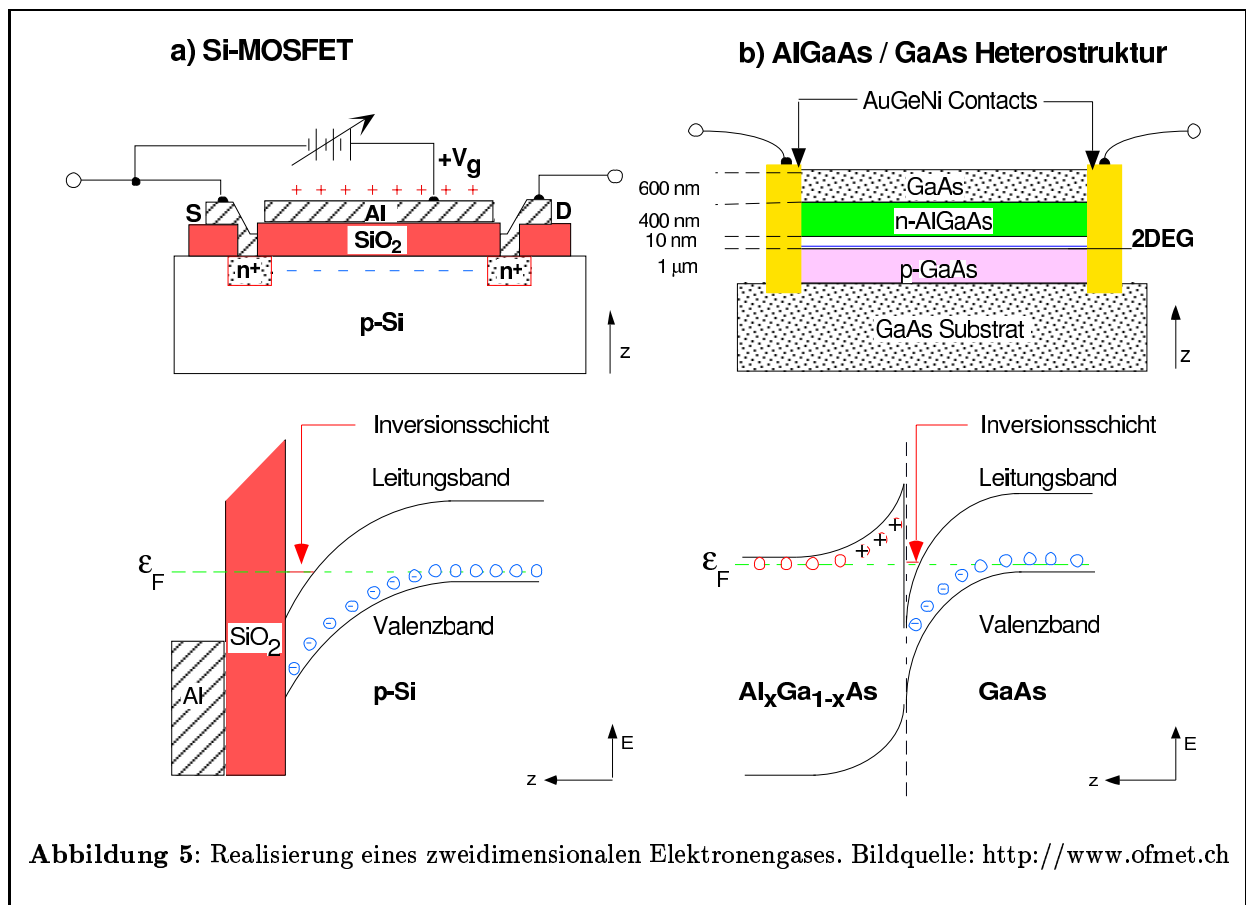


Abbildung 5: Realisierung eines zweidimensionalen Elektronengases. Bildquelle: <http://www.ofmet.ch>

zuerst diese Löcher. Ist die Gitterspannung jedoch genügend groß, so befindet sich ein Teil des Leitungsbandes unterhalb der Fermi-Energie, was den Elektronen erlaubt, den tiefer gelegenen Teil des Leitungsbandes nahe der Grenzschicht zu füllen. Man spricht von der sogenannten Inversionsschicht, weil der tiefste Punkt des Leitungsbandes unterhalb des höchsten Punktes im Valenzband liegt und damit die normale Ordnung verkehrt ist. Das zweidimensionale Elektronengas befindet sich in dieser Inversionsschicht, begrenzt durch eine ca. 30 nm breiten, dreieckigen Potentialtopf. In der Oxidschicht gefangene Verunreinigungen sowie Unregelmäßigkeiten in der Grenzschicht begrenzen die Mobilität des Elektronengases. Die Ladungsträgerdichte kann durch die Gitterspannung kontrolliert und eingestellt werden.

Das System basierend auf GaAs weist Ähnlichkeiten zum MOSFET auf (siehe Abb. 5b). In diesem Fall übernimmt das GaAs die Rolle des Halbleiters und das Al_xGa_{1-x}As ($x = 0.3$), das eine größere Bandlücke aufweist, wirkt als Isolierschicht. Mit Hilfe der Molekularstrahlepitaxie ist es möglich, Grenzschichten zwischen den beiden Materialien herzustellen, die dank der nahezu identischen Gitterkonstanten eine Regelmäßigkeit im Bereich eines Atomdurchmessers aufweisen. Das Al_xGa_{1-x}As wird n-dotiert und damit ist der untere Teil seines Leitungsbandes besetzt. Diese Elektronen driften gegen das GaAs und füllen dort zunächst die verfügbaren Löcher im oberen Teil des Valenzbandes. Die Mehrzahl

dieser Elektronen füllen jedoch den Grund des Leitungsbandes im GaAs. Damit bildet sich eine positive Ladung auf den Donatoren, es entsteht ein elektrisches Feld, welches die Elektronen gegen die Grenzschicht zwischen GaAs und AlGaAs verschiebt und eine Krümmung der Energiebänder bewirkt. Der Übergang von Elektronen aus dem AlGaAs in GaAs hält an, bis die dipolare Schicht, welche sich durch die positiven Donatoren und die negative Inversionsschicht bildet, genügend stark ist. Diese dipolare Schicht verursacht eine Diskontinuität im Potential, welche schließlich zu einem Angleich der Fermi-Energie in beiden Materialien führt. Die Dichte der Ladungsträger in der Inversionsschicht ist durch die Dotierung fest vorgegeben und somit für jede Probe fixiert, im Gegensatz zum MOSFET, in dem diese mit der Gitterspannung variiert werden kann. In der Praxis ist zusätzlich noch eine 10 nm dicke undotierte AlGaAs-Schicht eingeschoben, um die Donatoren vom Elektronengas fernzuhalten. Auf diese Weise wird eine beträchtliche Steigerung der Mobilität erzielt. Die Heterostruktur ist zusätzlich noch mit der Schutzschicht aus GaAs abgedeckt. Schließlich werden noch die Ohmschen Kontakte zum Elektronengas durch Aufdampfen und Eindiffundieren einer eutektischen AuGeNi-Legierung hergestellt.

3 Der klassische Hall-Effekt

Ein schematisches Bild des Hallschen Experiments ist in Abb. 6 gezeigt. An einem rechteckigen Leiterstreifen wird von außen ein elektrisches Feld E_x in x -Richtung angelegt. Deshalb fließt ein Strom I_x in dem Leiter. Zusätzlich sei ein Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ in z -Richtung angelegt. Wegen der Lorentzkraft $\vec{F}$,

$$\vec{F} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad \text{mit} \quad e > 0, \quad (4)$$

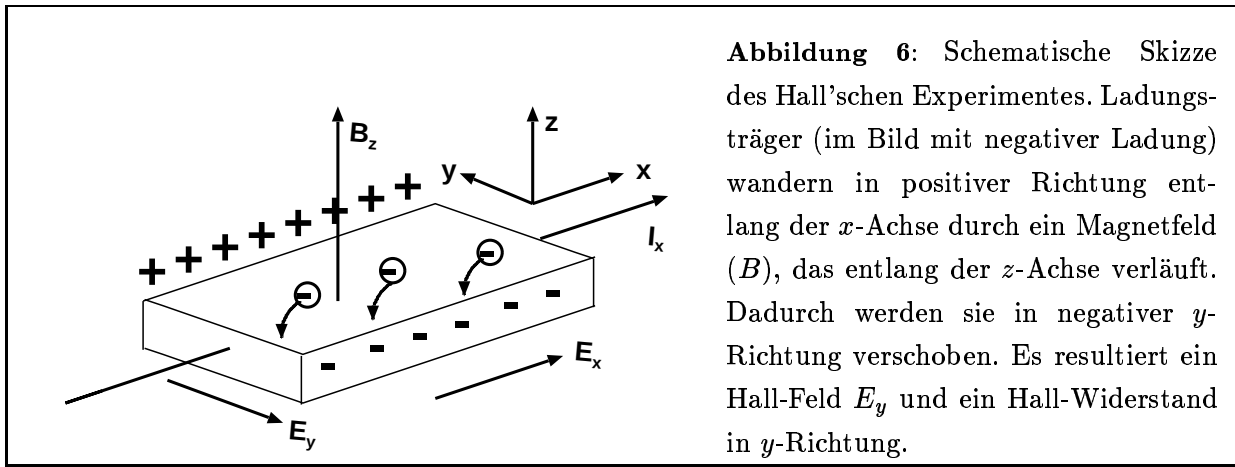
werden die Elektronen in $-y$ -Richtung² abgelenkt. Durch die Bewegung der Elektronen wird ein statisches, transversales elektrisches Feld E_y , das Hall-Feld, aufgebaut, das der weiteren Bewegung der Elektronen in $-y$ -Richtung entgegenwirkt. Im Gleichgewicht wird die Lorentzkraft durch das elektrische Potential gerade kompensiert. Es fließt also kein Strom in y -Richtung. Für kleine elektrische Felder besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Strom $\vec{I}$ und Spannung U , bzw. zwischen der Stromdichte $\vec{j}$ von Elektronen der Elektronendichte n_e , die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen,

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}, \quad \text{mit} \quad e > 0, \quad (5)$$

und dem elektrischen Feld $\vec{E}$

$$E_i = \varrho_{ij} j_j. \quad (6)$$

²rechte-Hand Regel



Wegen des angelegten Magnetfeldes ist der spezifische Widerstand³ ϱ_{ij} kein Skalar, sondern ein Tensor mit einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Anteil

$$\varrho_{ij}(\vec{B}) = \varrho_1(B^2) \delta_{ij} + \varrho_2(B^2) B_i \otimes B_j + \varrho_3(B^2) \varepsilon_{ijk} B_k. \quad (7)$$

Für den speziellen Fall der Filmgeometrie sind nur die Tensorkomponenten in der (x, y) Ebene von Bedeutung, die aus nur zwei unabhängigen Komponenten bestehen:

$$\varrho_{ij} = \begin{pmatrix} \varrho_{xx} & -\varrho_{yx} \\ \varrho_{yx} & \varrho_{xx} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Im Gleichgewicht gilt $\vec{j} = (j_x, 0, 0)$. Daraus folgt aus Gl. (6) und Gl. (8) insbesondere

$$\varrho_{xx}(B) = \frac{E_x}{j_x} \quad \text{und} \quad \varrho_{yx}(B) = \frac{E_y}{j_x}. \quad (9)$$

$\varrho_{xx}(B)$ ist der Magnetowiderstand, den Hall als magnetfeldunabhängig herausgefunden hatte. Genauer gesagt, sprechen wir gemäß der Anordnung in Abb. 6 vom transversalen Magnetowiderstand. Beim longitudinalen Magnetowiderstand liegt das Magnetfeld $\vec{B}$ parallel zur Stromdichte $\vec{j}$. ϱ_{yx} nennt man auch den Hall-Widerstand ϱ_H . Da das transversale Feld gerade die Lorentzkraft $\vec{F}$ kompensieren muss, erwarten wir, dass es proportional dem Magnetfeld ist und man definiert den sogenannten Hall-Koeffizienten

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{\varrho_{yx}}{B} = \frac{\varrho_H}{B}. \quad (10)$$

Die von dem elektromagnetischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit (Joule'sche Wärme) ist

$$\frac{dW}{dt} = \int d\vec{r} (\vec{j} \cdot \vec{E}) = \int d\vec{r} \sigma_{ij} E_i E_j. \quad (11)$$

³Im Allgemeinen arbeitet man mit dem spezifische Widerstand ϱ , der in charakteristischer Weise vom Material abhängt, statt mit dem Widerstand R , der auch noch von der Form des Meßobjektes abhängt. $R = \varrho L/A$, $U = EL$ und $I = jA$, wobei A die Fläche ist, deren Flächennormale parallel zur Stromdichte ist, und L die Länge der Probe in Richtung der Flächennormalen ist.

Der Leitfähigkeitstensor $\sigma_{ij} = (\varrho^{-1})_{ij}$ ist der inverse Widerstand

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\varrho_{xx}^2 + \varrho_{yx}^2} \begin{pmatrix} \varrho_{xx} & \varrho_{yx} \\ -\varrho_{yx} & \varrho_{xx} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Offensichtlich geht in die Arbeitsleistung

$$\frac{dW}{dt} = \sigma_{xx} (E_x^2 + E_y^2) = \frac{1}{\varrho_{xx}^2 + \varrho_{yx}^2} \varrho_{xx} (E_x^2 + E_y^2) \quad (13)$$

nur der symmetrische Anteil der Leitfähigkeit ein. Im Falle $\varrho_{xx} \gg \varrho_{yx}$ ist die Joule'sche Leistung dW/dt proportional zu, $dW/dt \sim 1/\varrho_{xx}$. Im Falle $\varrho_{yx} \gg \varrho_{xx}$ ist $dW/dt \sim \varrho_{xx}/\varrho_{yx}^2$.

Die einfachste Berechnung des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten geht auf die Drude-Theorie zurück. Das ist eine semi-klassische Theorie, in der die Quantenmechanik nur sehr indirekt berücksichtigt ist. Ausgangspunkt ist ein mechanisches Bild unabhängiger Elektronen, die für eine gewisse Zeit τ , der Relaxationszeit, als freie Elektronen auf der Skala der mittleren freien Weglänge $l_o = v/\tau = p/(m\tau)$ unter dem Einfluß der Lorentzkraft $\vec{F}$, Gl. (4), den klassischen Bewegungsgleichungen folgen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{p}}{\tau}, \quad (14)$$

dann einen abrupten Stoß erleiden und danach eine neue Geschwindigkeit haben, dessen Mittelwert die Driftgeschwindigkeit ist. Hier ist $\vec{p}$ der Impuls des Elektrons und dt/τ die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron im Zeitintervall dt einen Stoß mit anderen Elektronen ausführt⁴. Im stationären Zustand ist der Strom $\vec{j} = -n_e e \vec{p}/m$ unabhängig von der Zeit, d.h. $d\vec{p}/dt = 0$. Daraus folgt

$$-eE_x - \omega_c p_y - p_x/\tau = 0 \quad (15)$$

$$-eE_y + \omega_c p_x - p_y/\tau = 0. \quad (16)$$

ω_c ist die Zyklotronfrequenz definiert durch

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}. \quad (17)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $-n_e e \tau/m$ und berücksichtigen die Definition der Stromdichte gegeben in Gl. (5), finden wir

$$\sigma_o E_x = \omega_c \tau j_y + j_x \quad (18)$$

$$\sigma_o E_y = -\omega_c \tau j_x + j_y, \quad (19)$$

⁴Dementsprechend ist $(1 - dt/\tau)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Mittel ein Elektron keinen Stoß erleidet. Dies multipliziert mit deren mittleren Impuls pro Elektron $\vec{p}(t) + \vec{F}(t)dt$, ergibt die Bewegungsgleichung Gl. (14), $\vec{p}(t + dt) = (1 - dt/\tau)(\vec{p}(t) + \vec{F}(t)dt)$.

wobei σ_o gerade die spezifische Gleichstromleitfähigkeit im Drude-Modell in Abwesenheit des Magnetfeldes ist,

$$\varrho_0 = \varrho_{xx} = \frac{E_x}{j_x} = \frac{1}{\sigma_o} \quad \text{mit} \quad \sigma_o = \frac{n_e e^2 \tau}{m}. \quad (20)$$

Gemäß dem Hall-Experiment in der oben diskutierten Anordnung wird das Hall-Feld E_y durch die Bedingung bestimmt, daß kein transversaler Strom fließt, $j_y = 0$ und damit ist

$$E_y = -\left(\frac{\omega_c \tau}{\sigma_0}\right) j_x = -\left(\frac{1}{n_e e c}\right) B j_x. \quad (21)$$

Entsprechend der Gl. (9) erhält man für den nichtdiagonalen spezifische Widerstand

$$\varrho_H = \varrho_{yx} = -\frac{1}{n_e e c} B = -\frac{1}{\sigma_0} \omega_c \tau. \quad (22)$$

Dies ergibt für den Hall-Koeffizienten, definiert in Gl. (10)

$$R_H = -\frac{1}{n_e e c}. \quad (23)$$

Für den spezifischen Widerstandstensor erhalten wir dann in der Drude-Theorie die einfache Form

$$\varrho_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{m}{n_e e \tau} & \frac{1}{n_e e c} B \\ -\frac{1}{n_e e c} B & \frac{m}{n_e e \tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Der spezifische Leitfähigkeitstensor σ_{ij} ist das Matrixinverse von ϱ_{ij} , mit den Komponenten

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{yx} = \frac{n_e e c}{B} + \frac{1}{\omega_c \tau} \sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}. \quad (25)$$

Im Falle von N freien Teilchen, die nicht durch Stöße in ihrer Bewegung gestört werden ($\tau \rightarrow \infty$), ergibt sich für den spezifischen Widerstandstensor und den Leitfähigkeitstensor die einfachen Formen:

$$\varrho_{ij}^o = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n_e e c} B \\ -\frac{1}{n_e e c} B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}^o = \begin{pmatrix} 0 & n_e e c \frac{1}{B} \\ -n_e e c \frac{1}{B} & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

d.h. $\sigma_H^o = 1/\varrho_H^o$. (Der Index o steht hier für freie Ladungsträger ohne Wechselwirkung untereinander und mit dem Gitter.)

In der Drude-Theorie ist also der Hall-Widerstand ϱ_H proportional zum Magnetfeld B , dem Vorzeichen der Ladungsträgern und ist umgekehrt proportional zur Dichte der Elektronen n_e ⁵. Die Elektronendichte und das Vorzeichen der Ladungsträger sind die einzigen Materialparameter die den Hall-Widerstand in der Drude-Theorie bestimmen. Insbesondere hängt der Hall-Widerstand ϱ_H nicht von der Relaxationszeit τ , charakteristisch für die Streuung der Elektronen, ab. Diese Details sind eine Folge der sehr einfachen Annahmen über die Streuung, die der Drude-Theorie zu Grunde liegen. Im Allgemeinen hängt ϱ_H

⁵Dies gilt auch offensichtlich für den Quanten-Hall-Effekt, wie die Experimente in Abb. 1–3 als Funktion der Ladungsträgerkonzentration und des angelegten Magnetfeldes zeigen.

schwach von den Streuparametern ab. Die Messung des Hall-Koeffizienten ist eine wichtige experimentelle Methode zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte. Der longitudinale, bzw. der Ohmsche Widerstand $\varrho_o = 1/\sigma_o$, der den dissipativen Anteil des Widerstandes beschreibt, ist proportional der Stoßrate $1/\tau$.

ω_c ist ein Maß für die intrinsische Zeitskala des Systems in einem gegebenen äußeren Magnetfeld und $\omega_c\tau$ ist ein wichtiges dimensionsloses Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Im Limes kleiner Magnetfelder, d.h. wenn $\omega_c\tau$ klein ist ($\omega_c\tau \ll 1$), besagt Gl. (18), daß $\vec{j}_x$ nahezu parallel zu $\vec{E}_x$ ist. In diesem Fall können Elektronen nur einen kleinen Weg auf der Kreisbahn zurücklegen bis sie wieder gestreut werden. In diesem Falle gilt: $E_y \ll E_x$, $\varrho_o = \varrho_{xx} \approx 1/\sigma_o$, $\varrho_H = \varrho_{yx} \approx 0$, $\sigma_{xx} \approx \sigma_o$ und $\sigma_{yx} \approx 0$. Im Limes großer Magnetfelder ($\omega_c\tau \gg 1$), ist zu erwarten, dass die Elektronen genügend oft in den Kreisbahnen kreisen können. $\omega_c\tau \gg 1$ ist offenbar äquivalent zu der Bedingung $\varrho_o \ll \varrho_H$ und entsprechend Gl. 25 erwarten wir in diesem Falle nur eine kleine Korrektur (von der Ordnung $\sim (1/\omega_c\tau)^2$ bzw. $\sim (\varrho_o/\varrho_H)^2$) zur spezifischen Hall-Leitfähigkeit freier Elektronen σ_{yx}^o und eine spezifische Leitfähigkeit σ_{xx} von eben dieser Größenordnung. In diesem Falle gilt: $E_y \gg E_x$, $\sigma_{xx} \approx \varrho_{xx}/\varrho_{yx}^2 = \varrho_o/\varrho_H^2$ und $\sigma_{yx} \approx 1/\varrho_{yx} = 1/\varrho_H$.

Die Quanteneffekte der Elektronen werden in dieser Theorie durch die elektronische Struktur berücksichtigt. Sie ändert die Masse der Elektronen m in eine effektive Masse m^* , die bis zu einem Faktor 30 kleiner sein kann als m . Weiterhin verlangt das Pauli-Prinzip, daß nur Elektronen um die Fermienergie zum Transport beitragen. Dies ändert aber obige Gleichungen nicht ab. Außerdem bestimmen Quanteneffekte den Wert von τ , der typischerweise zwischen 10^{-10} s und 10^{-15} s beträgt, je nachdem ob es sich um einen Halbleiter oder um ein Metall handelt und in Abhängigkeit der Temperatur. Vergleichen wir $\omega_c(B = 1\text{T}) = 2 \times 10^{11}$ 1/s mit der Relaxationszeit von 10^{-10} s für einen Halbleiter bei 3 K (wobei die Relaxationszeit durch die Phonon-Streuung bestimmt ist), finden etwa 20 Zyklotronumläufe zwischen zwei Streuprozessen statt. Bei 300 K wären es nur noch 0.2 Umläufe oder das Magnetfeld müsste auf 100 T erhöht werden um den gleichen Effekt zu erzielen.

Die Zyklotronfrequenz ω_c und die Leitfähigkeit freier Ladungsträger kann man auch direkt aus der Bewegungsgleichung eines freien, klassischen Elektrons unter dem Einfluss eines statischen elektrischen Feldes $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, dem ein Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ überlagert ist, ableiten.

$$m\vec{\dot{v}} = -e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}). \quad (27)$$

Mit der Anfangsbedingung $\vec{v}(t = 0) = 0$ ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = (0, v_{Drift}, 0) + v_{Drift}(\sin \omega_c t, \cos \omega_c t, 0), \quad (28)$$

wobei der erste Summand die Driftgeschwindigkeit $v_{Drift} = -E_x c/B$ der Schwerpunktsbewegung in y -Richtung ist. Entsprechend ist der Zyklotronradius durch $r_c = v/\omega_c = mvc/(eB)$.

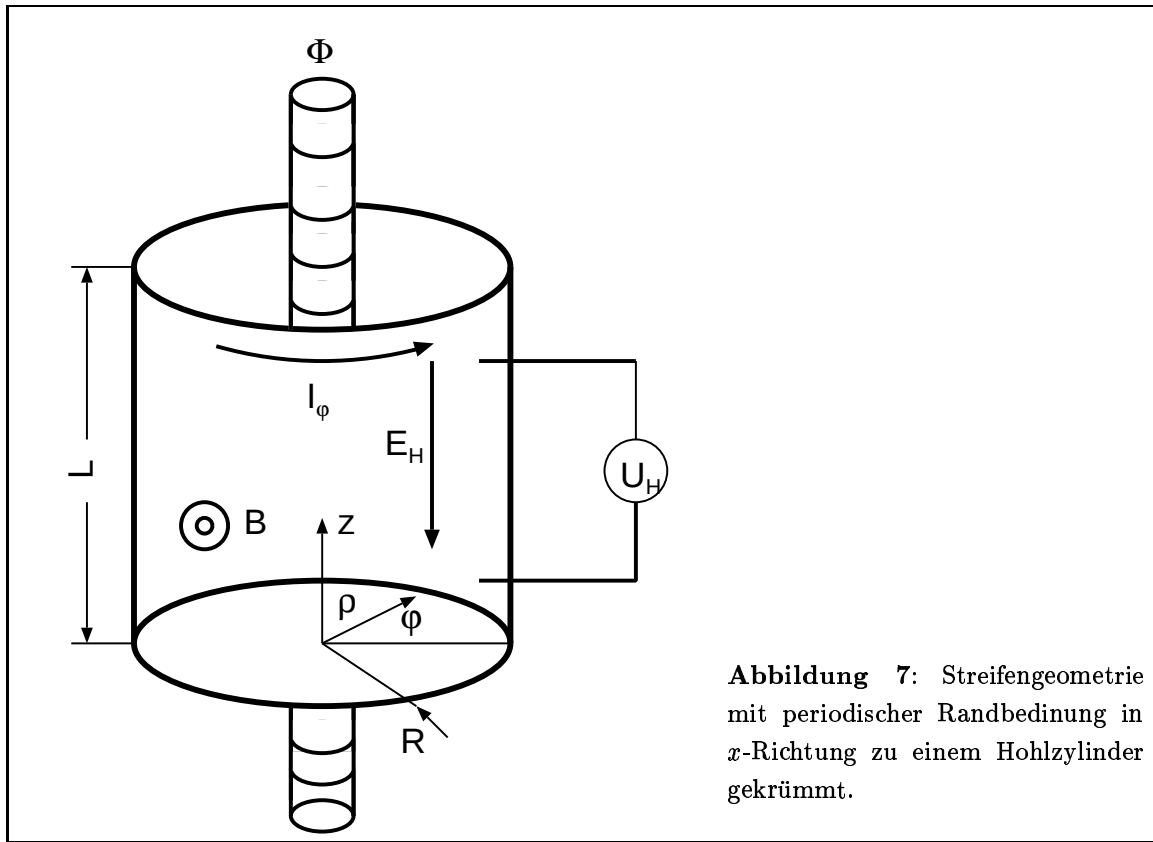


Abbildung 7: Streifengeometrie mit periodischer Randbedingung in x -Richtung zu einem Hohlzylinder gekrümmt.

4 Die Landau-Niveaus

In diesem Abschnitt betrachten wir das einfachste quantenmechanische Problem eines zweidimensionalen Elektronengases im magnetischen Feld, nämlich das von zweidimensionalen unabhängigen spinlosen Elektronen in einem homogenen magnetischen Feld normal zum zweidimensionalen Elektronengas. Wir folgen dabei Landau's klassischer Arbeit. Um die Schrödinger-Gleichung explizit hinschreiben, ist es notwendig eine Eichung des Vektorpotentials vorzunehmen. Die Landau-Eichung und die rotationsinvariante symmetrische Eichung sind besonders zweckmäßig. Wir benutzen in der Ableitung hier die rotationsinvariante Eichung

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}). \quad (29)$$

Um bei der Berechnung keine Schwierigkeiten mit den durch die Geometrie vorgegebenen Rändern zu haben, fordern wir für die Streifengeometrie in Abb. 6 periodische Randbedingungen in x -Richtung. Gedanklich biegen wir den langen schmalen Leiterstreifen zu einem Hohlzylinder (siehe Abb. 7). Der Zylinder habe den Radius R und die Länge L , die wir als sehr groß annehmen wollen ($L \rightarrow \infty$). Da es sich um ein zweidimensionales Problem mit Zylindersymmetrie handelt, ist es vorteilhaft Zylinderkoordinaten (r, φ, z) einzuführen. Das Magnetfeld, das in Abb. 6 überall senkrecht auf der Filmebene stand, zeigt jetzt radial nach außen: $\vec{B} = B\vec{e}_r$. Der Strom, der in der Geometrie Abb. 6 in x -

Richtung floss, fließt nun um den Zylinder, $\vec{I} = I_\varphi \vec{e}_\varphi$, und das Hall-Feld, in Abb. 6 entlang der y -Achse gelegen, liegt nun entlang der z -Achse. Eine Hall-Spannung sei fest vorgegeben, indem ein Hall-Feld E_H entlang der negativen z -Achse angelegt wird $E_z = -E_H$. Im Gegensatz zum Hallschen Experiment in Abb. 6, wird der Strom $I_\varphi \vec{e}_\varphi$ nicht durch ein elektrisches Feld E_x erzeugt, sondern induktiv durch eine zusätzliche kleine Spule, die entlang der z -Achse aufgewickelt ist. Das Magnetfeld der Spule ist auf das Volumen innerhalb der Spule beschränkt und bewirkt kein Magnetfeld innerhalb des Hohlzylinders. Dadurch bleibt der magnetische Fluss Φ über den Radius konstant und für das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}_\Phi$ gilt

$$\vec{A}_\Phi = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{e}_\varphi. \quad (30)$$

Das dem $\vec{B}$ -Feld zugehörigen Vektorpotential $\vec{A}$ ist ebenfalls rein tangential und es gilt

$$\vec{A} = -\frac{R}{r} z B \vec{e}_\varphi. \quad (31)$$

Unser Ausgangspunkt ist der Hamilton-Operator eines N -Elektronensystems

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A}_\Phi \right)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) + eE_H \sum_{i=1}^N z_i. \quad (32)$$

Für den Spezialfall $V = 0$ genügt es ein Eielektronenproblem zu betrachten. Für den Fall $E_H = 0$ ergibt sich das klassische Landau-Problem

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A}_\Phi \right)^2. \quad (33)$$

Die Darstellung des Impulsoperators in Zylinderkoordinaten

$$\vec{p} = -i\hbar \left(\frac{1}{R} \partial_\varphi \vec{e}_\varphi + \partial_z \vec{e}_z \right) \quad (34)$$

führt auf die folgende Form

$$H = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \left(\frac{1}{R} \partial_\varphi \vec{e}_\varphi + \partial_z \vec{e}_z \right) + \frac{e}{c} \left(\frac{\Phi}{2\pi R} - Bz \right) \vec{e}_\varphi \right]^2. \quad (35)$$

Unsere Aufgabe ist es nun, das Eigenwertproblem

$$H\psi = \varepsilon\psi \quad (36)$$

zu lösen und die Eigenwerte ε und Eigenfunktionen $\psi(\varphi, z)$ zu bestimmen. Da der Hamilton-Operator die Koordinate φ nicht explizit enthält, ist der Operator ∂_φ mit dem Hamilton-Operator vertauschbar, d.h. die φ -Komponente des verallgemeinerten Impulses bleibt erhalten und es liegt Translationsinvarianz in φ -Richtung vor. Dementsprechend setzen wir die Wellenfunktion mit folgendem Produktansatz an

$$\psi_{\kappa,n} = e^{i\kappa\varphi} \chi_{\kappa,n}(z) \quad \text{mit} \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Damit wird das Problem reduziert auf die Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen, linearen harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω_c für die Funktion $\chi_{\kappa,n}(z)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{m}{2} \omega_c^2 \left(z - \frac{\Phi}{2\pi BR} \right)^2 + \frac{\hbar\kappa}{R} \omega_c \left(z - \frac{\Phi}{2\pi BR} \right) \right] \chi_{\kappa,n}(z) = \left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2mR^2} \right) \chi_{\kappa,n}(z). \quad (38)$$

Eine quadratische Ergänzung

$$\frac{m}{2} \omega_c^2 \left(z^2 - 2z \frac{\Phi}{2\pi BR} \right) + \frac{\hbar\kappa}{R} \omega_c z = \frac{m}{2} \omega_c^2 \left(z - z_o(\kappa) \right)^2 - \frac{m}{2} \omega_c^2 z_o^2(\kappa) \quad (39)$$

$$\text{mit} \quad z_o(\kappa) = \frac{\Phi}{2\pi BR} - \frac{\hbar\kappa}{m\omega_c R} \quad (40)$$

führt diesen auf die kanonische Form des um $z_o(\kappa)$ verschobenen harmonischen Oszillators

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{m}{2} \omega_c^2 \left(z - z_o(\kappa) \right)^2 \right) \chi_{\kappa,n}(z) = \varepsilon_{\kappa,n} \chi_{\kappa,n}(z). \quad (41)$$

Damit ist das Problem gelöst, denn die Energieniveaus des eindimensionalen, linearen, harmonischen Oszillators sind wohlbekannt

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \geq 0. \quad (42)$$

n nimmt die Werte $n = 0, 1, 2, \dots$ an. Offensichtlich ist die Zyklotronenergie quantisiert und das Eigenwertspektrum ist vollkommen diskretisiert. Die Energieniveaus ε_n werden als die *Landau-Niveaus* bezeichnet (siehe Abb. 8). Gemäss den Gesetzen des harmonischen Oszillators ist der Abstand zwischen den Energieniveaus äquidistant und beträgt genau die Energie der Zyklotronfrequenz bzw. der Zyklotronenergie $\hbar\omega_c$. Das Eigenwertspektrum hängt nicht von κ ab. Die zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_{\kappa,n}(\varphi, z)$ zu den entsprechenden Energieniveaus

$$\psi_{\kappa,n}(\varphi, z) = \text{const} \left(\frac{1}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\kappa\varphi} \exp \left(-\frac{(z - z_o(\kappa))^2}{2r_c^2} \right) H_n \left(\frac{z - z_o(\kappa)}{r_c} \right) \quad (43)$$

sind Produkte aus Gauss-Funktionen und Hermiteschen Polynomen H_n . Der Zyklotronradius ist definiert durch

$$r_c = \left(\frac{\hbar}{m\omega_c} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar c}{eB} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

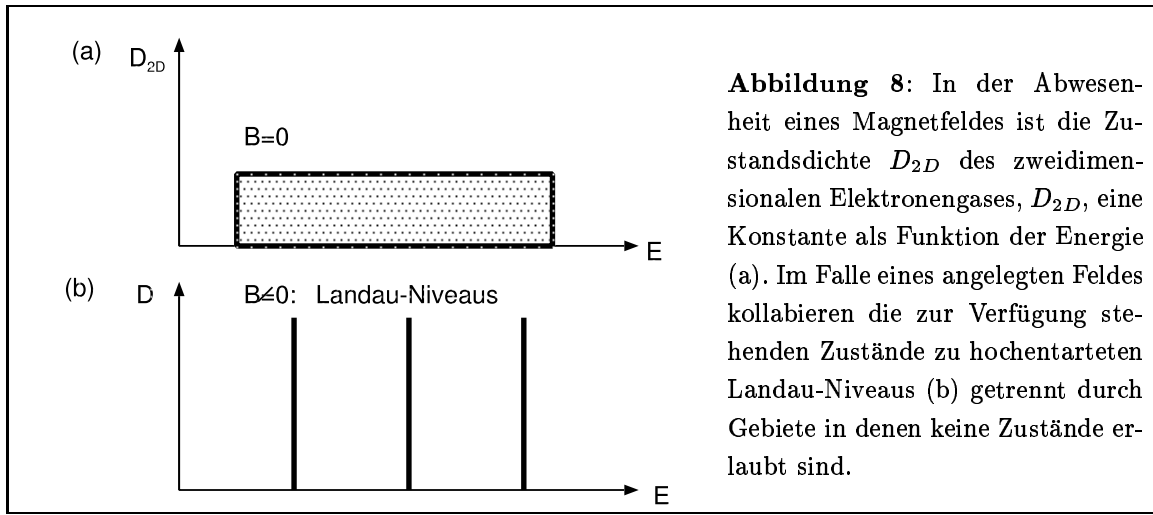
Das Zentrum des Oszillators

$$z_o(\kappa) = \frac{\Phi}{2\pi BR} - \frac{\hbar\kappa}{m\omega_c R} = \frac{\Phi}{2\pi BR} - \kappa \frac{r_c^2}{R} \quad (45)$$

entspricht dem Zentrum der klassischen Kreisbewegung mit dem mittleren quadratischen Radius

$$\left\langle \left(z - z_o(\kappa) \right)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) r_c^2, \quad (46)$$

proportional dem Quadrat des klassischen Zyklotronradius. Die Wellenfunktion $\psi_{\kappa,n}(\varphi, z)$ ist delokalisiert um den Hohlzylinder, aber stark lokalisiert entlang der Abszisse um die



Punkte $z_o(\kappa)$. Die Zentren z_o der Wellenfunktionen liegen auf konzentrischen Kreisen im Abstand $\Delta z_o = \hbar/Rm\omega_c$. Die charakteristische Länge der Lokalisierung ist $<(z - z_o)^2>^{1/2} = r_c/\sqrt{2}$. Die Lokalisierungslänge wächst mit n .

Der Zyklotronradius hier erinnert an die klassische Bewegung eines Elektrons auf einem Kreis mit dem Radius $cmv/(eB)$ aus dem Abschnitt 3, in der der Impuls mv durch das Wirkungsquantum $\hbar$ ersetzt wurde. Er definiert eine magnetische Länge, die die fundamentale Längenskala des Problems ist. Interessanterweise ist r_c unabhängig von Materialparametern, z.B. der Masse m . Im tiefsten Zustand, $n = 0$, ist der mittlere Radius der Elektronenverteilung $\sqrt{\langle(\Delta z)^2\rangle_{(n=0, B=1\text{T})}} = 178 \text{ \AA}$. Mit Zunahme des magnetischen Feldes wird die Lokalisierung stärker, z.B. für $B = 10 \text{ T}$ beträgt der Radius bereits $56 \text{ \AA}$. Dies sind Längenskalen die vergleichbar sind mit anderen typischen Längen des Systems.

Die Energie des harmonischen Oszillators $\hbar\omega_c$ bestimmt die Energieskala der Physik. Nehmen wir m gleich der Masse des freien Elektrons und für $B = 1 \text{ T}$ an, erhält man für $\omega_c = 1.76 \times 10^{11} \text{ Hz}$, bzw. eine Energiedifferenz $\Delta\varepsilon$ von etwa $\Delta\varepsilon \approx 1.2 \times 10^{-4} \text{ eV}$ was ungefähr $T \approx 1.5 \text{ K}$ entspricht. Das heißt, das System muss zu tieferer Temperatur abgekühlt werden oder es müssen stärkere Magnetfelder wirken, um einen nennenswerten Effekt der Energiequantisierung zu beobachten. Wie wir schon in Abschnitt 3 gesagt haben, muss für ein Elektron im Festkörper, die hier benutzte freie Elektronenmasse m , durch die effektive Masse m^* ersetzt werden, die von der Bandstruktur des Bauelementes abhängt, welches das zweidimensionale Elektronengas zur Verfügung stellt. m^* kann 30 Mal kleiner sein als die freie Elektronenmasse, und die Energieskala ist dann entsprechend größer als 1.5 K .

Wie wir schon gesehen haben ist das das Eigenwertspektrum der Landau-Niveaus ε_n in Gl. 42 nicht explizit von κ abhängig. Das bedeutet, dass die Landau-Niveaus hochgradig entartet sind. Alle Elektronen des homogenen Elektronengases in zwei Dimensionen, ohne

angelegtes Magnetfeld, haben die konstante Zustandsdichte

$$D_{2D}(E) = \frac{2\pi m}{h^2} \quad (47)$$

(Spinentartung wurde vernachlässigt), und diese kollabiert gleichverteilt in die Landau-Niveaus. Zu bestimmen ist der Entartungsgrad D eines Landau-Niveaus, d.h. die Zahl der möglichen κ Werte pro Flächeneinheit der Probe. Aufgrund der periodischen Randbedingung um den Hohlzylinder sind die möglichen κ -Werte diskrete Werte und durch ganze Zahlen gegeben. Wie wir schon früher gesagt haben, ist die Wellenfunktion um den Abszissenwert $z_o(\kappa)$ lokalisiert. Wenn die Länge des Hohlzylinders entlang der z -Achse durch L beschränkt ist, muss der Abstand zwischen den Peaks zweier Wellenfunktionen maximal gerade gleich dieser Länge sein ($\Delta z_o(\kappa) \leq L$). D.h. die Zylinderlänge legt eine obere Grenze für diese Zahlen κ fest und bestimmt den Entartungsgrad D der Landau-Niveaus aus allen möglichen κ Werten.

$$\Delta z_o = \frac{\hbar}{m\omega_c R} \Delta \kappa = \frac{r_c^2}{R} \Delta \kappa \leq L \quad (48)$$

Die Zahl der Zustände pro Fläche ($2\pi RL$) und pro Landau-Niveau ist also:

$$D = \frac{\Delta \kappa}{2\pi RL} = \frac{m\omega_c}{h} = \frac{1}{2\pi r_c^2} = \frac{eB}{hc} \quad (49)$$

Offensichtlich ist der Entartungsgrad und die Anzahl der Landau-Niveaus umgekehrt proportional, sodass wenn ein entarteter Zustand in eine gleichförmige Verteilung verbreitert würde, die Zustandsdichte dieser Verteilung $D/(\hbar\omega_c) = 2\pi m/h^2$ wäre, was gerade die Zustandsdichte des freien Elektronengases mit Ladungsträgern der Masse m in zwei Dimensionen ist. Entsprechend bietet sich ein zweiter einfacher Zugang zur Bestimmung des Entartungsgrades an: einfach all die Zustände des homogenen Elektronengases aufzusummieren, die in ein Landau-Niveau kollabieren werden:

$$D = \int_{\epsilon_n - 1/2\hbar\omega_c}^{\epsilon_n + 1/2\hbar\omega_c} d\epsilon D_{2D}(\epsilon) = \frac{2\pi m}{h^2} \hbar\omega_c = \frac{eB}{hc}. \quad (50)$$

Der Entartungsgrad pro Einheitsfläche kann man so interpretieren, dass jeder Zustand einen irreduziblen Anteil der Fläche mit der Größe hc/eB einnimmt. Für $B = 1$ T wäre dies ein Quadrat mit der Seitenlänge von ungefähr 60 nm (600 Å), und das wären ungefähr 2.7×10^{14} Zustände/m² – eine typische Elektronendichte in Quanten-Hall-Elementen. Die Zustandsdichte hängt nicht von der Elektronenmasse oder irgendwelchen anderen Materialparametern ab.

5 Elementare Theorie des Quantum-Hall-Effektes

Zur Erklärung des Quantum-Hall-Effektes berechnen wir nun den zugehörigen Strom $\vec{I} = I_\varphi \vec{e}_\varphi$. Es gibt natürlich immer eine Stromdichte $j_\varphi(\varphi, z) \vec{e}_\varphi$ um den Hohlzylinder mit

$$j_\varphi = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^\dagger \nabla_\varphi \psi - (\nabla_\varphi \psi)^\dagger \psi) \quad (51)$$

verknüpft mit den Zustand $\psi_{\kappa,n}(\varphi, z)$. Wegen der vorhandenen Vektorfelder schreibt sich

$$\nabla_\varphi = \frac{1}{R} \partial_\varphi - \frac{ie}{\hbar c} A_\varphi \quad \text{mit} \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R} - zB. \quad (52)$$

Berücksichtigt man dass $\psi_{\kappa,n}(\varphi, z) \sim e^{i\kappa\varphi}$ ist, erhält man direkt dass

$$j_\varphi(z) \sim \frac{1}{2m} \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{z - z_o(\kappa)}{r_c} \right) \exp \left(- \frac{(z - z_o(\kappa))^2}{r_c^2} \right) H_n^2 \left(\frac{z - z_o(\kappa)}{r_c} \right) \quad (53)$$

ist. Das Integral von Gl. 53 über z ergäbe den Gesamtstrom I_ψ des Zustandes ψ , aber das Integral ist null, weil das Quadrat der Wellenfunktion symmetrisch um z_o ist, der Vorfaktor aber ungerade.

Dieses Resultat kommt nicht unerwartet, wenn wir uns die Gruppengeschwindigkeit v_φ dieser Zustände anschauen, die man bekanntlich als Steigung der Dispersionsrelation $\varepsilon_{\kappa,n}$ erhält:

$$v_\varphi(\kappa, n) = R\dot{\varphi} = R \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_{\kappa,n}}{\partial \kappa} = 0 \quad (54)$$

Die Eigenfunktionen $e^{i\kappa\varphi}$ sind ebene Wellen, diese haben keine Gruppengeschwindigkeit, weil die Energie unabhängig von κ ist. Wenn wir ein Wellenpaket aus diesen Zuständen konstruieren würden, lokalisiert in φ , es würde sich nicht bewegen.

Eleganter und von erheblich allgemeinerer Bedeutung ist es jedoch, sich bei der Berechnung des Stromes an das Faraday'sche Induktionsgesetz der klassischen Elektrodynamik zu erinnern, in der die induzierte Spannung gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist. Die Relation

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} = -\frac{1}{c} I. \quad (55)$$

spiegelt diesen Zusammenhang in der Quantenmechanik wider: Dabei ist die Grundzustandsenergie ε der Erwartungswert des Vielteilchen-Hamilton-Operators H aus Gl. 32. Die Ableitung ist einfach. Mit der Definition der Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e}{2} \sum_i \left(\vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{v}_i \right) \quad (56)$$

können wir den Vielteilchen-Hamilton-Operator H (Gl. 32) in den folgenden Ausdruck umschreiben:

$$H = H_{\Phi=0} - \frac{1}{c} \int_S dr^2 \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}_\Phi(\vec{r}) + O(A^2). \quad (57)$$

Das zweidimensionale Integral erstreckt sich über die Mantelfläche des Zylinders. Terme der Ordnung A^2 sollen im folgenden vernachlässigt werden. Die Grundzustandsenergie ε ist der Erwartungswert von H , sodass nach dem Hellmann-Feynman Theorem

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} \rangle = -\frac{1}{c} \int dr^2 \langle \vec{j}(\vec{r}) \rangle \frac{\vec{e}_\varphi}{2\pi R} = -\frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} dz \langle \vec{j}(z) \rangle \vec{e}_\varphi \int_0^{2\pi} \frac{Rd\varphi}{2\pi R} = -\frac{1}{c} I \quad (58)$$

gilt.

Wenden wir dies nun auf das Eigenwertspektrum der Landau-Niveaus ε_n an, folgt sofort, dass der Strom $I = 0$ ist, da das Eigenwertspektrum unabhängig vom Fluss Φ ist. Die Tatsache, daß der Strom null ist, ist konsistent mit dem Ergebnis der klassischen Dynamik, welche vorhersagt, daß ein Elektron in einem Magnetfeld entlang der z -Richtung, geschlossene Bahnen in der (x, y) ausführt und der Schwerpunkt sich in keine bestimmte Richtung bewegt wenn kein elektrisches Feld anliegt.

Ein elektrisches Hall-Feld E_H entlang der $-z$ Richtung, welches bereits in der Schrödinger-Gleichung Gl. 32 durch das Potential $V(z_i) = eE_H z_i$ berücksichtigt wurde, dann aber vernachlässigt wurde, bricht die Symmetrie in z -Richtung und ein Strom wird erwartet. Berücksichtigen wir nun $eE_H z$ in der Einteilchen-Schrödinger-Gleichung Gl. 35 so führt eine quadratische Ergänzung

$$\frac{m}{2}\omega_c^2 \left(z^2 - 2z \frac{\Phi}{2\pi BR} \right) + \frac{\hbar\kappa}{R}\omega_c z + eE_H z = \frac{m}{2}\omega_c^2 (z - z_o(\kappa))^2 - \frac{m}{2}\omega_c^2 z_o^2(\kappa) \quad (59)$$

ganz analog wieder auf die kanonische Form des um $z_o(\kappa)$ verschobenen harmonischen Oszillators

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + \frac{m}{2}\omega_c^2 (z - z_o(\kappa))^2 \right) \chi_{\kappa,n}(z) = \bar{\varepsilon}_{\kappa,n} \chi_{\kappa,n}(z), \quad (60)$$

wobei dieses Mal aber das Eigenwertspektrum von $\bar{\varepsilon}_n$

$$\bar{\varepsilon}_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \geq 0 \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N} \quad (61)$$

bezüglich $\varepsilon_{\kappa,n}$ ebenfalls verschoben ist und dadurch $\varepsilon_{\kappa,n}$ explizit von κ , dem Hall-Feld E_H , und dem magnetischen Fluss Φ abhängt. $z_o(\kappa)$ ist nun ebenfalls vom Hall-Feld abhängig und wir erhalten:

$$z_o(\kappa) = \frac{\Phi}{2\pi BR} - \frac{\hbar\kappa}{m\omega_c R} - \frac{eE_H}{m\omega_c^2} \quad (62)$$

$$\text{und} \quad \varepsilon_{\kappa,n} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\Phi}{2\pi BR} - \frac{\hbar\kappa}{m\omega_c R} \right) eE_H + \frac{e^2 E_H^2}{2m\omega_c^2} \quad (63)$$

$$= \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - z_o(\kappa) eE_H - \frac{e^2 E_H^2}{2m\omega_c^2}. \quad (64)$$

Erinnert man sich daran, dass $z_o(\kappa)$ nichts anderes als der Erwartungswert von $\langle z \rangle = \langle n\kappa | z | \kappa n \rangle$ ist, kann man den κ -abhängigen Teil des Eigenwertspektrums schreiben als

$$\varepsilon_\kappa = -eE_H \langle z \rangle_\kappa. \quad (65)$$

Hieraus gewinnen wir die wichtige Erkenntnis, dass durch das äußere Hall-Feld die hochgradige Entartung aufgehoben wird und jeder Zustand κ im äußeren Feld eine andere potentielle Energie ε_κ aufnimmt.

Der Grundzustandsstrom $I_\varphi(\kappa, n)$ des Zustandes (κ, n) berechnet sich aus obiger Formel (Gl. 55) zu

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_{\kappa,n}}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} = -\frac{eE_H}{2\pi BR} = -\frac{1}{c} I_\varphi. \quad (66)$$

Falls gerade n Landau-Niveaus voll besetzt sind erhalten wir für den Strom

$$I_\varphi = F D n \frac{ecE_H}{2\pi BR} = 2\pi RL \frac{eB}{hc} n \frac{ecE_H}{2\pi BR} = n \frac{e^2}{h} E_H L = n \frac{e^2}{h} (-U_H). \quad (67)$$

$E_H L$ ist die in $-z$ -Richtung angelegte Hall-Spannung $-U_H$. Der Strom fließt in $-\varphi$ -Richtung. Die Hall-Leitfähigkeit $\sigma_H = \sigma_{yx}$ entspricht hier $-\sigma_{\varphi z} = -I_\varphi/U_H$. Daraus folgt dann für die Hall-Leitfähigkeit das gefeierte Resultat:

$$\sigma_H = n \frac{e^2}{h}, \quad (68)$$

wobei das n -te Hall-Plateau gerade mit den n aufgefüllten Landau-Niveaus übereinstimmt.

Man kann auch die Hall-Leitfähigkeit mittels der Gruppengeschwindigkeit, Gl. 54, ableiten. Mittels der Energie ε_κ , Gl. 65, finden wir die Gruppengeschwindigkeit $v_\varphi = R\dot{\varphi}$ um den Hohlzylinder

$$v_\varphi = R\dot{\varphi} = R \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_\kappa}{\partial \kappa} = -\frac{E_H}{B} c. \quad (69)$$

Wir finden, dass die Gruppengeschwindigkeit eines Zustandes um den Hohlzylinder identisch dem klassischen Ergebnis der Hall-Driftgeschwindigkeit ist, das wir bereits in Gl. 27 abgeleitet haben. In der klassischen Sprache war es die Driftgeschwindigkeit des Schwerpunkts der Zyklotronbahn, die sich als Folge der Balance von Lorentzkraft und elektrischem Feld ergab. Der Strom I_φ ergibt sich dann aus der Gruppengeschwindigkeit eines Zustandes, in dem man über alle Zustände (κ, n) summiert, mit der Zustandsdichte D und der Fläche F multipliziert und durch den Weg des Stromes L_φ dividiert:

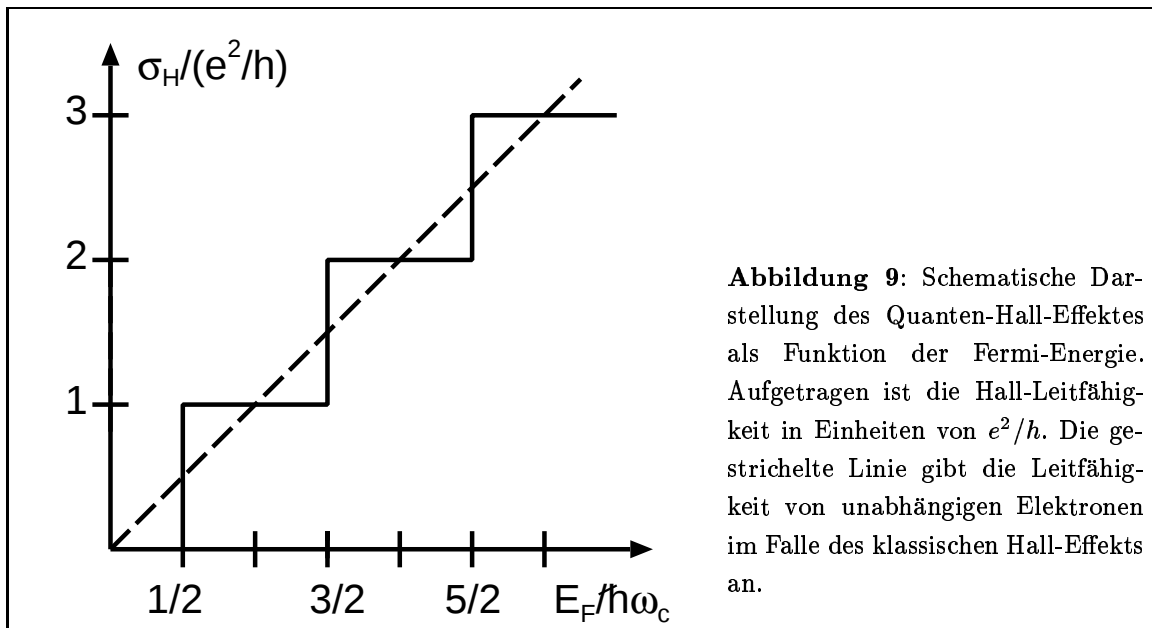
$$I_\varphi = (-e) \sum_{\kappa, n} F D(\kappa, n) \frac{1}{2\pi R} v_\varphi(\kappa, n) = (-e) n 2\pi RL \frac{eB}{hc} \frac{1}{2\pi R} \left(-\frac{E_H}{B} \right) c = n \frac{e^2}{h} (-U_H). \quad (70)$$

Dies führt zum gleichen Ergebnis. Hier noch eine Anmerkung: Man kann auch Gl. 51 benutzen um den Strom abzuleiten. Aufgrund des vorhandenen Hall-Feldes ändert sich der Vorfaktor in Gl. 53 von $(z - z_o(\kappa))/\hbar \rightarrow (z - z_o(\kappa) - eE_H/(m\omega_c)^2)/\hbar$. Dadurch ist der Vorfaktor nicht mehr ungerade und der Hall-Strom ist endlich.

Für das Verständnis des Quanten-Hall-Effektes sind die Landau-Niveaus wesentlich. Auf jedem haben D Elektronen pro Flächeneinheit Platz. Die Zahl hängt von der Stärke des Magnetfeldes ab. Bei niedrigen Temperaturen werden die Niveaus von unten aufgefüllt. Das Maß für die Füllung ist der Füllfaktor $\eta = n_e/D$, ein dimensionslose Verhältnis zwischen der Anzahl der Ladungsträger N pro Fläche F , n_e , und dem Entartungsgrad D . Schreibt man den Füllfaktor etwas um,

$$\eta = \frac{n_e}{D} = \frac{N}{F} \frac{hc}{eB} = N \frac{hc}{e} \frac{1}{BF} = \frac{N}{\frac{BF}{\Phi_0}} \quad \text{wobei} \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}, \quad (71)$$

sieht man, daß der Füllfaktor gerade das Verhältnis aus der Zahl der Ladungsträger und der Zahl der Flussquanten BF/Φ_0 im System angibt. Nachdem ein Landau-Niveau



gefüllt ist, liegt die Fermi-Energie notwendigerweise im Gap zwischen den besetzten und unbesetzten Landau-Niveaus. Es ist plausibel anzunehmen, dass in diesem Falle keine Streuung stattfindet, das heißt τ ist unendlich und ρ_o verschwindet. Gleichzeitig ist der Hall-Widerstand $h/(ne^2)$ gemäss der n (Füllfaktor η ist gerade ganzzahlig) gefüllten Landau-Niveaus (siehe Abb. 9). Aber warum sollte die Fermi-Energie gerade zwischen zwei Landau-Niveaus liegen? Wir erinnern uns daran wie die Fermi-Energie E_F definiert ist. Bei tiefen Temperaturen können wir schreiben, dass

$$n_e = \int_{-\infty}^{E_F} D(\varepsilon, B) d\varepsilon, \quad (72)$$

wobei n_e die Elektronendichte und $D(\varepsilon, B)$ die Zustandsdichte ist. Immer wenn die Fermi-Energie durch ein Landau-Niveau läuft, steigt die Zustandsdichte sprunghaft an und die Elektronendichte nimmt als Funktion der Fermi-Energie sprunghaft zu. D.h. eine Änderung in der Elektronendichte ist verknüpft mit der Änderung der Fermi-Energie nach $\delta n_e = D(E_F, B)\delta E_F$. Daraus resultiert, daß es extrem unwahrscheinlich ist, daß die Fermi-Energie in einem Gebiet extrem geringer Zustandsdichte liegt. Kleinste Änderungen in der Elektronendichte würden große Verschiebungen der Fermi-Energie nach sich ziehen. D.h. die Fermi-Energie ist in den Energien hoher Zustandsdichte gepinnt. Ausgehend von diesem Gesichtspunkt erwarten wir, dass die Fermi-Energie in den Landau-Niveaus gepinnt ist. Wenn das wahr ist, bricht aber das vorher genannte Argument zusammen, dass der geringe Längswiderstand gemessen in den Experimenten ein Folge davon ist, dass n Landau-Niveaus aufgefüllt und die Fermi-Energie in einem Gap liegt. Man könnte es praktisch nie beobachten. Es stellt sich also die Frage nach einem Mechanismus, der dazu führt, dass die Fermi-Energie zwischen den Landau-Niveaus liegt, und gleichzeitig das Springen von Landau-Niveau zu Landau-Niveau verhindert, und folglich zu den ge-

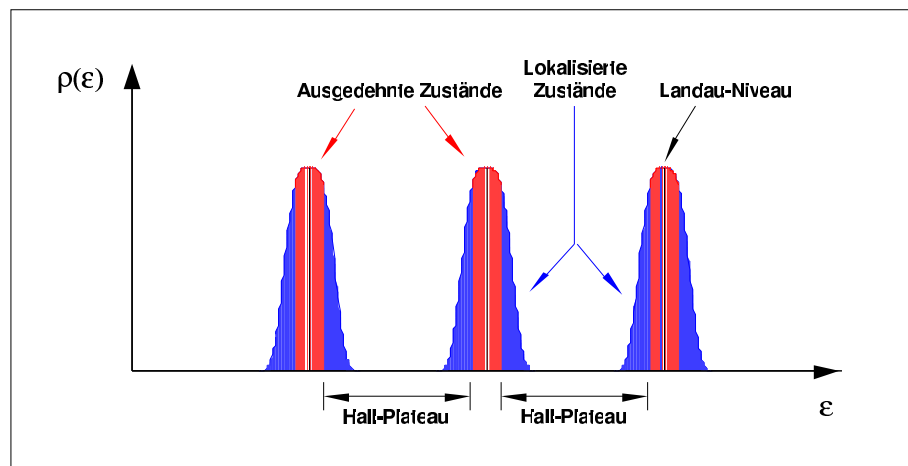


Abbildung 10: Schematische Darstellung der Zustandsdichte in einem zweidimensionalen Elektronengas. Verunreinigungen im Halbleiter z.B. in der Nähe der Grenzschicht verursachen eine Aufspaltung der diskreten Landau-Niveaus in Bänder, die aus vielen verschiedenen Zuständen bestehen. Um das Zentrum jedes Bandes befinden sich die ausgedehnten Zustände, welche die elektrischen Eigenschaften der Probe bestimmen. Die Zustände am oberen und unteren Rand der Bänder sind von lokalisierten Elektronen besetzt. Diese Elektronen sind räumlich fixiert und tragen nicht zum Ladungstransport bei. Bildquelle: <http://www.ofmet.ch>

ringen Längswiderständen und den quantisierten Hall-Widerständen führt, die wir vorher diskutiert haben.

Tatsächlich wird derzeit angenommen, dass in Realitas die Zustandsdichten zwischen zwei Landau-Niveaus erheblich sind, weil reale Proben Potentialfluktuationen haben, z.B. verursacht durch die unterschiedlich starke Streuung der Elektronen an Störstellen. Die hochgradige Entartung der Landau-Niveaus wird (teilweise) aufgehoben, so dass diese sich zu Bändern verbreitern (siehe Abb. 10). Diese Potentialfluktuationen führen zu einem neuen Mechanismus: der Lokalisierung. Diese Potentialfluktuationen erzeugen eine Potentiallandschaft in denen die Ladungsträger auf Zyklotronorbitalen entlang von Äquipotentialpfaden driften und in Täler der Potentiallandschaft eingefangen werden können und damit ihre Beweglichkeit einbüßen. In Konkurrenz dazu neigen Tunneleffekte zwischen benachbarten Minima, die Wellenfunktion zu delokalisieren. Diese Lokalisierung tritt insbesondere dort auf, wo die Dichte der Zustände auf der Energieskala vergleichsweise gering ist. Dass nun die Lokalisierung in Tälern in Konkurrenz zum Tunneleffekt und die entstehenden Zyklotronbahnen aufgrund des äußern Magnetfeldes sich tatsächlich so arrangieren, daß der beschriebene Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang mit einer so robusten Quantisierung verträglich ist, muß in einer mikroskopischen Theorie erst einmal gezeigt werden.

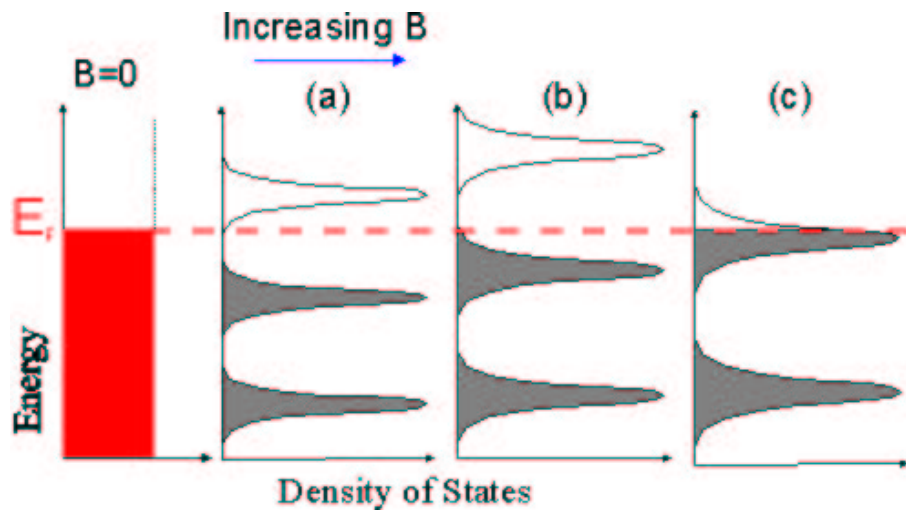


Abbildung 11: Wenn die Fermi-Energie im Gap (a) zwischen den verbreiterten Landau-Niveaus liegt, können Elektronen nicht in neue Zustände streuen und es gibt keine Streuung. Der Transport ist dissipationslos, der Widerstand ist null und der Hall-Widerstand ändert sich nicht. Wenn das Magnetfeld zunimmt (b), liegt die Fermi-Energie in den Bändern der lokalisierten Zustände und wir sind immer noch im Mobilitätsgap ohne Änderung der Leitfähigkeiten. Wenn das Magnetfeld weiter zunimmt (c), dann liegt die Fermi-Energie im Bereich der delokalisierten Zustände. Der Hall-Widerstand springt zum nächsten Plateau und die longitudinale Leitfähigkeit wird endlich. Bildquelle: <http://www.warwick.ac.uk/~phsbn>

Entscheidend für das Auftreten des quantisierten Hall-Effektes ist nun, wie sich das System beim Durchfahren des chemischen Potentials durch die verbreiterten Landau-Niveaus verhält. Für den Fall einer ansteigenden Dichte oder abnehmenden Magnetfeldes beobachten wir: Die lokalisierten Zustände werden zunehmend aufgefüllt ohne die ausgedehnten Zustände zu besetzen. Solange Bereiche lokalisierter Zustände durchfahren werden, können Zustände, die mit Elektronen be- oder entvölkert werden, nichts zur Leitfähigkeit der Probe beitragen. In diesem Bereich ändert sich nichts am Hall-Widerstand der Probe und der quantisierte Wert bleibt erhalten. Die longitudinale Leitfähigkeit (und damit der longitudinale Widerstand) verschwindet (bei $T = 0$ K). Durchfährt die Fermi-Energie allerdings Bereiche ausgedehnter Zustände, liefern die Zustände, die mit Elektronen be- oder entvölkert werden, einen Beitrag zur Leitfähigkeit. In diesem Bereich ändert sich die Hall-Leitfähigkeit der Probe von einem Plateau zum nächsten und die longitudinale Leitfähigkeit ist endlich.

Entscheidend ist also, dass lokalisierte Zustände zwar besetzbar sind, und damit das Springen der Fermi-Energie verhindern, aber zum Strom nicht beitragen. Bewegt sich also die Fermi-Energie durch einen Bereich lokalisierter Zustände, so bleibt $\sigma_o = 0$ und $\sigma_H = \text{const.}$ Wir haben also kein Gap in der Zustandsdichte, sondern sprechen von einem Mobilitätsgap. Dies erklärt die Möglichkeit des Auftretens von Plateaus. Um den in Abb. 9 gezeigten Verlauf der Hall-Leitfähigkeit zu erhalten, muss man noch zeigen, dass

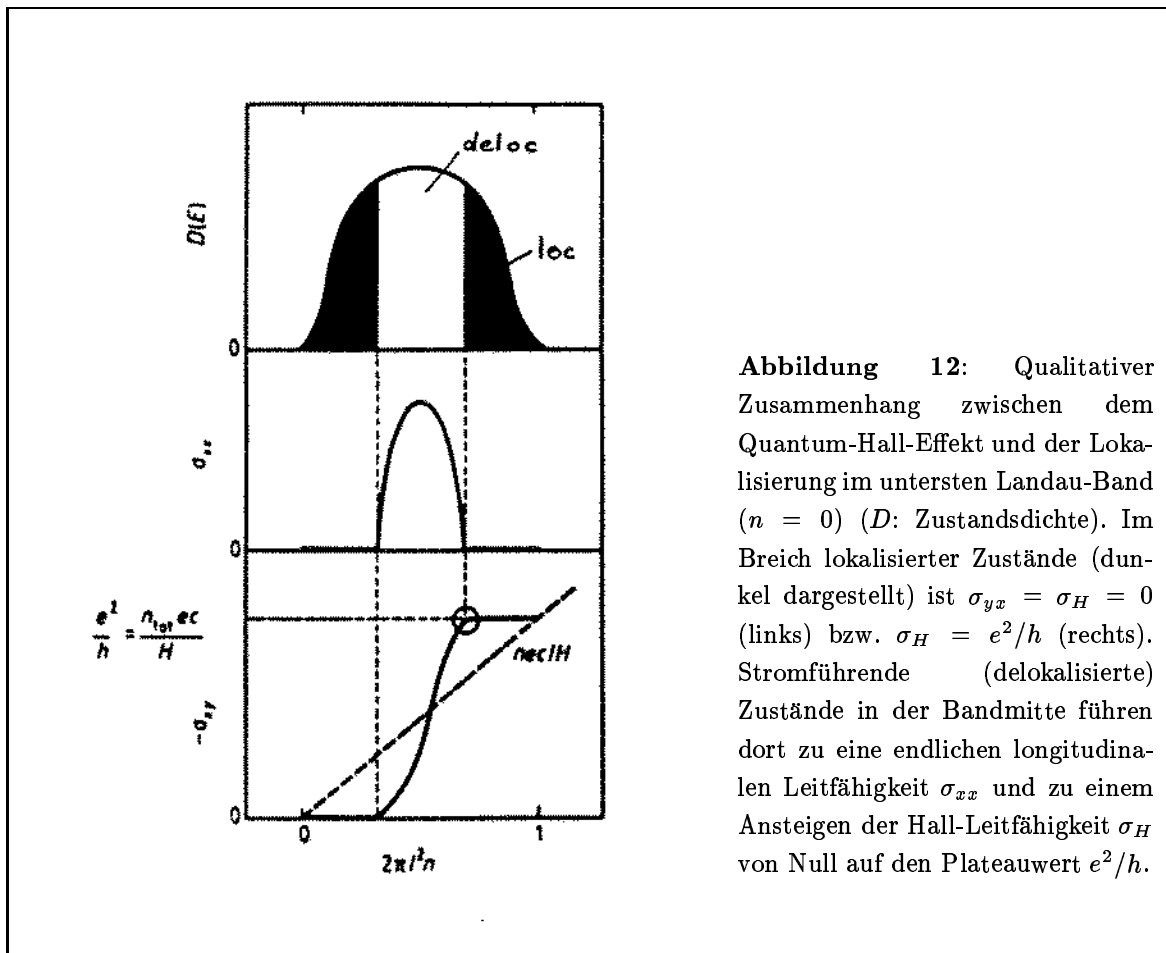


Abbildung 12: Qualitativer Zusammenhang zwischen dem Quantum-Hall-Effekt und der Lokalisierung im untersten Landau-Band ($n = 0$) (D : Zustandsdichte). Im Bereich lokalisierter Zustände (dunkel dargestellt) ist $\sigma_{yx} = \sigma_H = 0$ (links) bzw. $\sigma_H = e^2/h$ (rechts). Stromführende (delokalisierte) Zustände in der Bandmitte führen dort zu einer endlichen longitudinalen Leitfähigkeit σ_{xx} und zu einem Ansteigen der Hall-Leitfähigkeit σ_H von Null auf den Plateauwert e^2/h .

die Plateauwerte tatsächlich durch ne^2/h gegeben sind und ihre Breite durch kleine Bereiche beweglicher (delokalisierter) Zustände in der Mitte der Landau-Bänder beschränkt ist. Für beide Sachverhalte gibt es theoretische Hinweise. Verschiedene Untersuchungen [8] (siehe die Lehrbücher von R.E. Prange und S.M. Girvin oder M. Stone) am Elektronen-Störstellen-System kamen nämlich zu dem Ergebnis, dass in den jeweils betrachteten idealisierten Modellen, die Hall-Leitfähigkeit in den Punkten $\eta = n$ die gleichen Werte annimmt wie bei freien Elektronen. Ferner haben analytische und numerische Untersuchungen an solchen Modellen ergeben, dass die Zustände bei $\varepsilon \approx \varepsilon_n$ stets delokalisiert sind. Vereint man die Einzelergebnisse, so ergibt sich die in Abb. 12 dargestellte quantitative Erklärung des Quantum-Hall-Effektes. Sie wird durch numerische Rechnungen für ein Elektronen-Störstellen-System bestätigt (Ref. [9]).

6 Eichargumente von Laughlin

Die experimentellen Resultate zum Quanten-Hall-Effekt gelten bei sehr vielen Substraten und die Ergebnisse sind immer gleich. Sind diese Resultate denn allgemeiner als die

gegebene Ableitung? Warum gilt $\sigma_H = e^2/h$ mit so großer Präzision? Laughlin [6] hat versucht, diese Fragen zu beantworten. Seine Idee war es, $\partial\varepsilon/\partial\Phi$ auf andere Weise zu berechnen, und zwar so, dass möglichst wenig Details des speziellen Modells eingehen. Diese Rechnung lässt sich dann leicht verallgemeinern.

Kann man $\Delta\varepsilon/\Delta\Phi$ für ein spezielles $\Delta\Phi$ berechnen, ohne $\varepsilon(\Phi)$ zu kennen? Was passiert, wenn Φ um ein elementares Flussquantum $\Delta\Phi = \Phi_0 = ch/e$ erhöht wird? Für den Fall freier Elektronen geht Φ in die Wellenfunktion nur durch

$$z_o(\kappa) = -\frac{1}{\omega_c} \left(\frac{\hbar}{mR} \left(\kappa - \frac{e\Phi}{ch} \right) + \frac{cE_H}{B} \right) \quad (73)$$

ein. Die Änderung von Φ um ein elementares Flussquantum ist äquivalent der Änderung von $\kappa \rightarrow \kappa - 1$. Die Einteilchenzustände gehen also ineinander über. Was ist passiert? Ein Teilchen ist aus dem tiefsten besetzten Zustand ($z_o \sim L$) in den ersten unbesetzten Zustand angehoben worden. Nachdem ein Teilchen gegen die angelegte Spannung gelaufen ist, hat es die zusätzliche Energie $e\Delta U_H$ (pro Landau-Niveau). Es gilt also

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Phi} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\Phi} = -\frac{e\Delta U_H}{\Phi_0} n = -\frac{e^2}{h} n \Delta U_H. \quad (74)$$

In der Anordnung aus Abb. 7 wird das Hall-Feld E_H konstant gehalten. Dies ist nur möglich, falls die Teilchen bei $z = 0$ sofort abfließen und bei $z = L$ neue Teilchen nachrücken. Unser System ist also ein offenes System. Die Energie des Subsystems Zylinder ε_Φ ist periodisch mit Φ_0 . Für die Energie ε_Φ des Gesamtsystems bestehend aus Zylinder + Reservoir gilt Gl. 74.

Diese Resultate können auf einen beliebigen Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) - \frac{e}{c} \frac{\Phi}{2\pi R} \vec{e}_\varphi \right)^2 + V \quad (75)$$

verallgemeinert werden. Das Potential V enthalte die Wechselwirkung der Elektronen untereinander und mit den Störstellen, sowie das Hall-Feld E_H . Die N -Elektronen-Wellenfunktion $\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_N, z_1, \dots, z_N)$ hängt von $2N$ Koordinaten (φ_i, z_i) ab. Der Einfachheit halber wird im folgenden die z -Abhängigkeit nicht explizit ausgeschrieben. Es ist möglich, eine Eichtransformation durchzuführen

$$\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \exp\left(2\pi i \frac{\alpha}{\hbar} R \sum_{i=1}^N \varphi_i\right) u(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \quad (76)$$

derart, dass im umgekehrten System $\Phi = 0$ gilt. Dazu müssen wir $\alpha = e\Phi/(2\pi Rc)$ wählen. Dann gilt:

$$H_\Phi |\psi\rangle = \varepsilon_\Phi |\psi\rangle \quad \text{und} \quad H_{\Phi=0} |u\rangle = \varepsilon_\Phi |u\rangle. \quad (77)$$

Die ursprüngliche Wellenfunktion erfüllt die Randbedingung

$$\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_i + 2\pi, \dots, \varphi_N) = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N) \quad (78)$$

während für die umgeechte Funktion gilt:

$$u(\varphi_1, \dots, \varphi_i + 2\pi, \dots, \varphi_N) = \exp\left(-2\pi i \frac{\alpha}{\hbar} R\right) u(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N). \quad (79)$$

Für $\Phi = \Phi_0$ ist u periodisch, und das umgeechte Problem ist identisch mit dem ursprünglichen Problem mit $\Phi = 0$. Falls der Grundzustand *nicht* entartet ist, gilt dann $|u\rangle = |\psi\rangle$ und $\varepsilon_{\Phi_0} = \varepsilon_0$. Die Energie des Gesamtsystems kann sich nur dadurch geändert haben, dass n Teilchen gegen die Hallspannung durch den Zylinder transportiert wurden. Die Energiedifferenz ist also:

$$\varepsilon(\Phi_0) - \varepsilon(0) = -en \Delta U_H \quad (80)$$

und für den Strom folgt:

$$-\frac{1}{c} I_\varphi = -en \frac{\Delta U_H}{\Phi_0}. \quad (81)$$

Falls der Grundzustand entartet ist, und man $\Phi = p\Phi_0$ Flussquanten braucht, um den ursprünglichen Zustand zu reproduzieren, gilt

$$I = \frac{n}{p} \frac{e^2}{h} \Delta U_H. \quad (82)$$

Die Entartung des Grundzustands scheint eine wesentliche Voraussetzung für den rational quantisierten Halleffekt zu sein. Die Forderung nach der Eindeutigkeit des Grundzustands trifft für nicht wechselwirkende Elektronen nur im Fall voll besetzter Landau Niveaus zu. Die Streuung an Störstellen ist ein Mechanismus, der die Entartung der Niveaus aufhebt.

Ich danke Herrn Daniel Wortmann für das kritische Lesen des Manuskripts.

7 Literaturhinweise

Das hier besprochene Thema wird bereits in Lehrbüchern und Übersichtsartikeln der Festkörperphysik abgehandelt. Eine Auswahl wird hier angegeben.

1. R.E. Prange and S.M. Girvin (Eds.), *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, New York (1990).
2. M. Stone (Ed.), *Quantum Hall Effect*, World Scientific, Singapore (1992).
3. T. Chakraborty, P. Pietiläinen, *The quantum Hall effects*, Springer-Verlag, Berlin (1995).
4. J. Hajdu and B. Kramer, Phys. Blätter **41**, 401 (1985).
5. T. Chakraborty, Phys. Blätter Nov.90, 432 (1990).
6. G. Abstreiter, Phys. Blätter **54**, 1098 (1998).

Literatur

- [*] Elektronische Adresse: s.bluegel@fz-juelich.de
Internetadresse: <http://www.fz-juelich.de/iff/personen/S.Bluegel>
- [1] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
 - [2] A. Briggs *et al.*, Phys. Rev. B **27**, 6549, (1983).
 - [3] B. Jeckelmann, W. Fasel, and B. Jeanneret, IEEE Trans. Instrum. Meas. **44**, 265 (1995).
 - [4] D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
 - [5] H.L. Störmer, Physica B **177**, 401 (1992).
 - [6] R.B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
 - [7] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
 - [8] R.E. Prange, Phys. Rev. B **23**, 4802 (1981).
 - [9] T. Ando in *Anderson Localization*, Editoren: Y. Nagaoka, H. Fukuyama, Springer (Heidelberg, Berlin, New York, 1982), S. 176.